Ekologia, Vol. 12 No.2 , Oktober 2012 : 36-40

ANALISIS METODE *LAGRANGE* DAN TRANSFORMASI *LAPLACE* DALAM MENGHITUNG MUATAN RANGKAIAN LISTRIK SEDERHANA

Embay Rohaeti
FMIPA Universitas Pakuan, Bogor

ABSTRAK

Dalam menghitung muatan rangkaian listrik sederhana biasanya diselesaikan dengan ilmu Fisika. Salah satu solusi alternatif lain adalah dengan menggunakan Persamaan Differensial berupa metode *Lagrange* dan Transformasi *Laplace*.

Keywords: *Rangkaian Listrik Sederhana, Persamaan Differensial, Metode Lagrange, Transformasi Laplace.*

PENDAHULUAN

Matematika sebagai bahasa simbol yang bersifat universal sangat erat hubungannya dengan kemajuan teknologi. Kenyataan membuktikan bahwa untuk menyelesaikan masalah-masalah kehidupan nyata dibutuhkan metode-metode Matematika yang dimodelkan dalam model matematika seperti model persamaan differensial (Bronson, 2007).

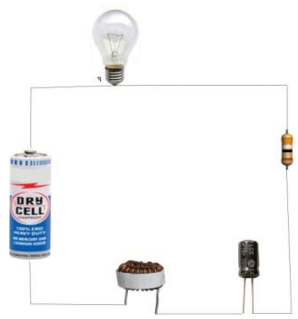
Dalam menghitung muatan rangkaian listrik sederhana biasanya diselesaikan dengan ilmu fisika. Hasil akhir perhitungan muatan rangkaian listrik sederhana selalu sama walaupun diselesaikan secara Fisika, metode *Lagrange* dan Transformasi *Laplace*. Metode *Lagrange* dan Transformasi *Laplace* mempunyai kelebihan dan kelemahan masing-masing sehingga perlu dianalisis dalam menyelesaikan suatu perhitungan rangkaian listrik sederhana.

BAHAN DAN METODE

Metode yang digunakan dalam menghitung muatan rangkaian listrik sederhana adalah metode *Lagrange* dan Transformasi *Laplace*.

HASIL DAN PEMBAHASAN

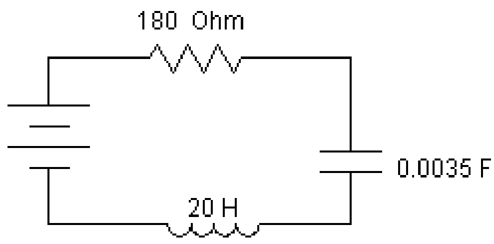
Suatu rangkaian listrik memiliki $R = 180$ ohm, $C = 1/280$ farad, $L = 20$ Henry, dan sebuah sumber tenaga sebesar $E(t) = 10\sin t$ volt. Bila diketahui pada saat t = 0, besar muatan listrik $q(t)$ adalah nol dan besar nilai turunan pertama muatan listrik $q'(t)$ adalah 1, tentukan besar muatan listrik (q) pada saat $t = 1$. (Giancoli, 1998).



Pembahasan Metode *Lagrange*

Menurut Moentiarsanto, (1982), langkah penyelesaian dengan metode *Lagrange*:

a. Membentuk permasalahan ke dalam bentuk rangkaian listrik sederhana sebagai berikut :



b. Membentuk model matematika

Berdasarkan hukum Kirchhoff II mengenai beda tegangan pada suatu rangkaian tertutup yang memuat sumber tenaga, "jumlah beda tegangan pada resistor, induktor, dan kapasitor sama dengan beda tegangan yang dihasilkan sumber tenaga", dapat ditulis :

$$E_L + E_R + E_C = E$$

berdasarkan persamaan (1), (2), (3) didapat :

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E$$

karena $i = \frac{dq}{dt}$

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$20\frac{d^2q}{dt^2} + 180\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\frac{1}{280}} = 10\sin t$$

$$20\frac{d^2q}{dt^2} + 180\frac{dq}{dt} + 280q = 10\sin t$$

maka model matematika dari rangkaian listrik sederhana tersebut adalah:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 9\frac{dq}{dt} + 14q = \frac{1}{2}\sin t$$

c. Model matematika tersebut dapat ditulis ke dalam persamaan differensial sebagai berikut:

$$(D^2 + 9D + 14)y = \frac{1}{2}\sin t$$

d. Merubah persamaan di atas ke dalam persamaan karakteristik, kemudian mencari akar-akar karakteristik setelah terlebih dahulu membentuk ke persamaan kuadrat sebagai berikut:

$$m^2 + 9m + 14 = 0$$

$$(m+2)(m+7) = 0$$

$$m_1 = -2,\ m_2 = -7$$

e. Langkah selanjutnya, setelah akar karakteristik diketahui kemudian mencari Penyelesaian Umum Persamaan Differensial yaitu dengan mencari *complemen solution* dan *particular solution* sebagai berikut:

i. *Complemen solution*:
Setelah diketahui akar karakteristik dari persamaan differensial, yaitu $m_1 = -2$, $m_2 = -7$ maka mencari *complemen solution* dengan rumus:

$$q_c = C_1e^{m_1t} + C_2e^{m_2t}$$

maka *complemen solution* adalah :

$$q_c = C_1e^{-2t} + C_2e^{-7t}$$

ii. *Particular solution* :
Selanjutnya mencari *particular solution* dengan memasukkan akar-akar karakteristiknya ke dalam metode *Lagrange* sebagai berikut:

$$q_p = e^{m_1t}\int e^{(m_2-m_1)t}\int Q(t)e^{-m_2t}\,dtdt$$

$$= e^{-2t}\int e^{(-7-(-2))t}\int \frac{1}{2}\sin te^{7t}\,dtdt$$

$$= e^{-2t}\int e^{-5t}\int \frac{1}{2}\sin te^{7t}\,dtdt$$

$$= e^{-2t}\int e^{-5t}.\frac{1}{2}\left(\frac{e^{7t}}{(7)^2+1^2}(7\sin t - \cos t)\right)dt$$

$$= e^{-2t}\int e^{-5t}\left(\frac{e^{7t}}{100}(7\sin t - \cos t)\right)dt$$

$$= e^{-2t}\left\{\frac{1}{100}\int e^{2t}(7\sin t - \cos t)dt\right\}$$

$$= e^{-2t}\left\{\frac{1}{500}\left(13\sin te^{2t} - 9\cos te^{2t}\right)\right\}$$

$$= \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

maka

$$q = q_c + q_p$$

f. PUPD tersebut harus memenuhi syarat awal, yaitu:

- Pada $t = 0 \rightarrow q(0) = 0$

$$q(0) = C_1 + C_2 - \frac{9}{500} \quad ..... \quad (25)$$

- Pada saat $t = 0 \rightarrow \frac{dq(0)}{dt} = 1$

$$\frac{dq(t)}{dt} = -2C_1e^{-2t} - 7C_2e^{-7t} + \frac{13}{500}\cos t + \frac{9}{500}\sin t$$

$$1 = -2C_1 - 7C_2 + \frac{13}{500}$$

$$-2C_1 - 7C_2 = 1 - \frac{13}{500} \quad \ldots.(26)$$

eliminasikan persamaan (25) dan (26), maka didapat:

$$C_1 = \frac{110}{500} \text{ dan } C_2 = -\frac{101}{500}$$

dengan demikian diperoleh penyelesaian bersyarat batas tersebut di atas adalah:

$$q(t) = \frac{110}{500}e^{-2t} - \frac{101}{500}e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

atau

$$q(t) = \frac{1}{500}\left(110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13\sin t - 9\cos t\right)$$

g. Mencari besar muatan rangkaian listrik sederhana pada saat t = 1

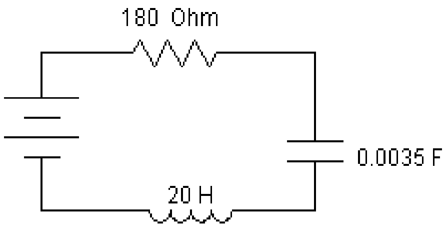
$$q(t) = \frac{1}{500}\left(110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13\sin t - 9\cos t\right)$$

$$q(1) = 0{,}012 \text{ C}$$

Transformasi *Laplace*

Menurut Wardiman (1978), langkah-langkah penyelesaian dengan Tansformasi *Laplace*:

a. Membentuk permasalahan ke dalam bentuk rangkaian listrik sederhana, sebagai berikut:



b. Membentuk model matematika
Berdasarkan hukum Kirchhoff II mengenai beda tegangan pada suatu rangkaian tertutp yang memuat sumber tenaga, "jumlah beda tegangan pada resistor, induktor, dan kapasitor sama dengan beda tegangan yang dihasilkan sumber tenaga", dapat ditulis:

$$E_L + E_R + E_C = E$$

Berdasarkan persamaan (1), (2), (3) didapat:

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = E$$

karena $i = \frac{dq}{dt}$, maka

$$L\frac{d}{dt}\left(\frac{dq}{dt}\right) + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E$$

$$20\frac{d^2q}{dt^2} + 180\frac{dq}{dt} + \frac{q}{\frac{1}{280}} = 10\sin t$$

$$20\frac{d^2q}{dt^2} + 180\frac{dq}{dt} + 280q = 10\sin t$$

Maka model matematika dari rangkaian listrik sederhana tersebut adalah.

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 9\frac{dq}{dt} + 14q = \frac{1}{2}\sin t$$

c. Mencari persamaan muatan listrik sembarang t waktu

$$q''(t) + 9q'(t) + 14q = \frac{1}{2}\sin t$$

$$L\{q''(t) + 9q'(t) + 14q\} = L\{\frac{1}{2}\sin t\}$$

$$L\{q''(t)\} + 9L\{q'(t)\} + 14L\{q\} = \frac{1}{2}L\{\sin t\}$$

- Mencari *Laplace* dari $q''(t)$

$$L\{q''(t)\} = s^2L\{q(t)\} - s\{q(0)\} - q'(0)$$
$$= s^2L\{q(t)\} - 0 - 1$$
$$= s^2L\{q(t)\} - 1$$

- Mencari *Laplace* dari $9q'(t)$

$$9L\{q'(t)\} = 9[sL\{q(t) - q(0)\}] \\ = 9[sL\{q(t) - 0\}] \\ = 9sL\{q(t)\}$$

➢ Mencari *Laplace* dari $14q(t)$

$$14L\{q\} = 14L\{q(t)\}$$

maka

$$(s^2 + 9s + 14)L\{q(t)\} - 1 = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2 + 1}$$

$$L\{q(t)\} = \frac{1}{2}\frac{1}{s^2+1} x \frac{1}{s^2 + 9s + 14} + \frac{1}{s^2 + 9s + 14}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{(s^2+1)(s^2 + 9s + 14)} + \frac{1}{(s^2 + 9s + 14)}$$

i. Merubah bentuk di atas sebagai berikut:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2 + 9s + 14)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9s + 14}$$

ii. Menyamakan fungsi kedua ruas sebagai berikut:

$$\frac{1}{(s^2+1)(s^2 + 9s + 14)} = \frac{(As + B)(s^2 + 9s + 14) + (Cs + D)(s^2 + 1)}{(s^2+1)(s^2 + 9s + 14)}$$

iii. Mencari nilai koefisien A, B, C, dan D sebagai berikut:

$$1 = (As + B)(s^2 + 9s + 14) + (Cs + D)(s^2 + 1)$$

$$1 = (A + C)s^3 + (9A + B + D)s^2 + (14A + 9B + C)s + (14B + D)$$

Untuk $s^3 = 0 \quad \rightarrow A + C = 0$ .... (27)

$s^2 = 0 \quad \rightarrow 9A + B + D = 0$ .... (28)

$s^1 = 0 \quad \rightarrow 14A + 9B + C = 0$............................... (29)

$s^0 = 1 \quad \rightarrow 14B + D = 1$.. (30)

dengan menggunakan eliminasi dan substitusi untuk persamaan (27) sampai (30), maka didapat :

$$A = -\frac{9}{250}, \quad B = \frac{13}{250}, \quad C = \frac{9}{250}, \quad D = \frac{68}{250}$$

maka persamaan muatan listrik sembarang t waktu adalah :

$$q(t) = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9s + 14}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 9s + 14}\right)$$

$$= \frac{1}{500}L^{-1}\left(\frac{-9s + 13}{s^2 + 1} + \frac{9s + 68}{s^2 + 9s + 14}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2 + 9s + 14}\right)$$

$$= \frac{1}{500}\left\{-9\cos t + 13\sin t + e^{-7t}(-1 + 10e^{5t})\right\} + \frac{1}{5}e^{-7t}\left(-1 + e^{5t}\right)$$

d. Mencari besar muatan rangkaian listrik sederhana pada saat t = 1 adalah

$$q(1) = \frac{1}{500}\left\{-9\cos 1 + 13\sin 1 + e^{-7}(-1+10e^{5})\right\} + \frac{1}{5}e^{-7}\left(-1+e^{5}\right)$$

$$q(1) = 0{,}012 \text{ C}$$

KESIMPULAN

Berdasarkan hasil analisis, bentuk persamaan metode *Lagrange* dari muatan rangkaian listrik sederhana untuk sembarang t adalah

$q(t) = \frac{1}{500}\left(110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13\sin t - 9\cos t\right)$maka besar muatan rangkaian listrik sederhana pada saat $t = 1$ adalah $0{,}012$ C, sedangkan bentuk transformasi *Laplace* dari muatan rangkaian listrik sederhana untuk sembarang t adalah:

$q(t) = \frac{1}{500}L^{-1}\left(\frac{-9s+13}{s^2+1} + \frac{9s+68}{s^2+9s+14}\right) + L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+9s+14}\right)$maka besar muatan rangkaian listrik sederhana pada saat $t = 1$ adalah $0{,}012$ C.

DAFTAR PUSTAKA

Bronson, R. 2007. *Persamaan Diferensial* Edisi Ketiga. Jakarta : Erlangga.

Giancoli, CD. 1998. *Fisika Jilid* 2. Jakarta : Erlangga.

Moentiarsanto, D. 1982. *Persamaan Differensial.* Yogyakarta : Ananda.

Wardiman. 1978. *Transformasi Laplace*. Yogyakarta : Bagian Ilmu Pasti Dan Alam UGM