Ekologia, Vol. 11 No.2 , Oktober 2011:46-52

METODE RUNGE KUTTA DALAM PENYELESAIAN MODEL RADANG AKUT

***Hagni Wijayanti*[1]*, Sri Setyaningsih*[2]*, Mardika Wati*[3]**
[1,2,3]*Program Studi Matematika, FMIPA-UNPAK, Bogor*

ABSTRAK

Metode Runge Kutta adalah metode penyelesaian masalah nilai awal persamaan diferensial dengan pendekatan iterasi numerik, sehingga sangat efisien jika penyelesaiannya dengan menggunakan pemrograman komputer, yang dalam penelitian ini diimplementasikan pada software Mathematica versi 7.0. Model radang akut adalah suatu model persamaan diferensial non linier yang telah dibuat berupa persamaan populasi patogen, persamaan populasi fagosit ketika diaktifkan, dan persamaan laju kerusakan jaringan. Solusi model radang akut dapat diperoleh dengan menggunakan metode Runge Kutta, sehingga dapat ditunjukkan perilaku dinamik pada populasi patogen, populasi fagosit ketika diaktifkan, dan laju kerusakan jaringan.

Kata kunci : Metode Runge Kutta, Model Radang Akut, Populasi Patogen, Populasi Fagosit ketika Diaktifkan, Laju Kerusakan Jaringan.

PENDAHULUAN

Peranan matematika sebagai alat dalam menyelesaikan berbagai masalah sangat penting. Permasalahan dalam berbagai bidang pada dunia nyata dapat diselesaikan dengan membuat model matematika dan mencari solusinya. Salah satu model matematika yang banyak digunakan adalah model persamaan diferensial. Beberapa penelitian telah dilakukan untuk memperoleh solusi dari masalah yang dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial. Solusi dari masalah tersebut dapat diselesaikan secara analitis dan secara numerik. Salah satu metode untuk memperoleh solusi dari model matematika secara numerik adalah Metode Runge Kutta.

Menurut Sasongko (2010), Metode Runge Kutta adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan ketelitian yang cukup tinggi. Metode ini sangat umum digunakan untuk menyelesai kan bentuk persamaan diferensial biasa, baik linier maupun nonlinear dengan permasalahan kondisi awal. Dalam hal ini, Metode Runge Kutta digunakan untuk menyelesaikan suatu model matematika pada radang akut yang telah dimodelkan dalam bentuk persamaan diferensial.

Menurut Muhdor (2007), radang akut adalah reaksi awal dari tubuh terhadap pengaruh-pengaruh yang merusak ditandai dengan tanda klasik dari peradangan-bengkak, kemerahan, nyeri, panas, dan kehilangan fungsi-ketika terjadinya infiltrasi jaringan oleh leukosit dan plasma. Pengaruh-pengaruh tersebut bisa disebab-kan karena adanya patogen, bakteri atau benda asing lainnya. Reaksi ini merupakan upaya pertahanan tubuh. Model yang ada pada radang akut terdiri dari sistem persamaan diferensial nonlinear yang tergantung pada variabel-variabel yang menggambarkan perubahan dari populasi patogen, populasi fagosit yang diaktifkan, seperti neutrofil yang diaktifkan, dan laju kerusakan jaringan.

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memperoleh solusi model matematika pada radang akut dengan menggunakan Metode Runge Kutta, sehingga dapat memberikan gambaran tentang perilaku dinamik pada populasi patogen, populasi fagosit ketika diaktifkan, dan laju kerusakan jaringan.

BAHAN DAN METODE

Metodelogi penelitian yang dilakukan adalah untuk merancang dan mengimplementasikan metode runge Kutta pada model radang akut, sehingga diperoleh solusi model radang akut. Tahapan-tahapan pelaksanaan penelitian adalah sebagai berikut:

Perencanaan

Pada tahap perencanaan yaitu melakukan pengumpulan data. Data yang dikumpulkan merupakan data yang berhubungan dengan model matematika pada radang akut, diperoleh dari internet dan buku. Data akan digunakan untuk perencanaan pembuatan simulasi.

Analisis

Pada tahap analisis dilakukan pengindentifikasian permasalahan dan menarik kesimpulan dari proses analisis yang dilakukan. Identifikasi model radang akut sebagai masalah yang harus diselesaikan dan mengetahui apa yang akan dilakukan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Penyelesaian masalah persamaan diferensial nonlinear dapat dilakukan dengan metode Runge Kuta. Metode Runge Kutta adalah metode iterasi numerik, sehingga penyelesaian dengan pemrograman komputer akan sangat efektif.

Perancangan

Pada tahap perancangan menggunakan metode Runge Kutta dengan memasukkan parameter-parameter model radang akut. Pada tahap ini dilakukan pembuatan flowchart yang menunjukkan alur kerja pada pemrograman komputer.

Implementasi

Tahap implementasi merupakan proses pengaplikasian hasil perancangan pemrograman komputer untuk memperoleh solusi model radang akut dengan menggunakan Mathematica versi 7.0.

Uji Coba

Tahap ini berfungsi untuk mengkoreksi sistem yang dibuat apakah sudah memenuhi kriteria kerja. Tahapan ini menguji validasi yaitu hasil dari keseluruhan proses matematis dibandingkan dengan perhitungan secara manual untuk beberapa iterasi.

Penggunaan

Setelah melalui tahap pengujian, maka dapat diperoleh solusi model radang akut yang dapat menggambarkan tentang perilaku dinamik pada populasi patogen, populasi fagosit ketika diaktifkan, dan laju kerusakan jaringan

HASIL DAN PEMBAHASAN

Model Matematika Pada Radang Akut

Model yang ada pada radang akut terdiri dari sistem persamaan diferensial nonlinear yang tergantung pada variabel-variabel yang menggambarkan level-level dari populasi patogen (P), populasi fagosit yang diaktifkan (N^*) seperti neutrofil yang diaktifkan, dan laju kerusakan jaringan (D). Patogen adalah parasit yang mampu menimbulkan penyakit pada inangnya atau bahan yang menimbulkan penyakit. Fagosit adalah sel-sel yang berfungsi mematikan mikroorganisme asing di sekitarnya dengan cara meluluhkannya ke dalam plasma selnya, misalnya sel darah putih memakan kuman.

Parameter-parameter yang digunakan untuk membentuk model matematika adalah:

$M(t)$ = populasi respon lokal non-spesifik pada waktu t
$P(t)$ = populasi patogen pada waktu t
$N^*(t)$ = populasi fagosit yang diaktifkan pada waktu t
$D(t)$ = kerusakan jaringan pada waktu t
k_{pg} = banyaknya pertumbuhan patogen
P_∞ = populasi maksimum patogen

k_{pm} = banyaknya respon lokal non-spesifik (*M*) menghilangkan patogen
s_m = sumber penghasil respon lokal non-spesifik
μ_m = banyaknya kerusakan respon lokal non-spesifik
k_{mp} = banyaknya respon lokal non-spesifik dihabiskan patogen
k_{pn} = banyaknya fagosit yang diaktifkan mengkonsumsi patogen
s_{nr} = sumber penghasil fagosit yang beristirahat
μ_{nr} = banyaknya kerusakan fagosit yang beristirahat
μ_n = banyaknya kerusakan fagosit yang diaktifkan
k_{dn} = banyaknya kerusakan maksimum yang diproduksi oleh fagosit yang diaktifkan
μ_d = banyaknya pengurangan kerusakan, kombinasi perbaikan, resolusi dan regenerasi jaringan
k_{nn} = aktifasi fagosit yang beristirahat oleh fagosit yang diaktifkan sebelumnya dan sitokin-sitokinnya
k_{np} = aktifasi fagosit yang beristirahat oleh patogen
k_{nd} = aktifasi fagosit yang beristirahat oleh kerusakan jaringan
s_{dn} = menentukan level fagosit yang diaktifkan yang dibutuhkan untuk menyebabkan kerusakan hingga setengah maksimumnya

Model matematika pada radang akut adalah:

$$\frac{dP}{dt} = k_{pg}P\left(1 - \frac{P}{P\infty}\right) - \frac{k_{pm}s_m P}{\mu_m + k_{mp}P} - k_{pn}N^*P$$

$$\frac{dN^*(t)}{dt} = \frac{s_{nr}(k_{nn}N^* + k_{np}P + k_{nd}D)}{\mu_{nr} + k_{nn}N^* + k_{np}P + k_{nd}D} - \mu_n N^*$$

$$\frac{dD}{dt} = k_{dn}\left(\frac{N^{*6}}{s_{dn}{}^6 + N^{*6}}\right) - \mu_d D$$

Model ini terdiri dari satu sistem persamaan diferensial nonlinear yang bergantung pada variabel-variabel yang menyatakan tingkat patogen (*P*), fagosit yang diaktifkan (*N**) dan laju kerusakan jaringan (*D*).

Kemudian diberikan parameter pada persamaan diferensial tersebut (Reynold, 2006), yaitu:

k_{pg} = 0.6/jam
P_∞ = 20 x 10^6 / cc
k_{pm} = 0.6/unit *M*/jam
s_m = 0.005 unit *M*/jam
μ_m = 0.002/jam
k_{mp} = 0.01/unit *P*/jam
k_{pn} = 1.8/unit *N**/jam
s_{nr} = 0.08 unit *NR*/jam
μ_{nr} = 0.12/jam
μ_n = 0.05/jam
k_{dn} = 0.35 unit *D*/jam
μ_d = 0.02/jam
k_{nn} = 0.01/unit *N**/jam
k_{np} = 0.1/unit *P*/jam
k_{nd} = 0.02/unit *D*/jam
s_{dn} = 0.46656 x 10^{-13} unit *N**

Sehingga model radang akut menjadi:

$$\frac{dP}{dt} = 0.6P\left(1 - \frac{P}{20x10^6}\right) - \frac{0.6x0.005P}{0.002 + 0.01P} - 1.8N^*P$$

$$\frac{dN^*}{dt} = \frac{0.08(0.01N^* + 0.1P + 0.02D)}{0.12 + 0.01N^* + 0.1P + 0.02D} - 0.05N^*$$

$$\frac{dD}{dt} = 0.35\left(\frac{N^{*6}}{0.46656 \text{ x } 10^{-13} + N^{*6}}\right) - 0.02D$$

Metode Runge Kutta

Metode Runge Kutta adalah suatu metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan masalah nilai awal atau masalah nilai batas pada persamaan differensial linear atau nonlinear. Metode Runge Kutta orde empat mempunyai persamaan yaitu

$$y_{i+1} = y_i + \phi\ (x_i, y_i, h)\, h$$

dengan, y_i = nilai sebelumnya

y_{i+1} = nilai selanjutnya dengan ukuran langkah h

h = ukuran langkah

$\phi\ (x_i, y_i, h)$ disebut suatu fungsi inkremen yang dapat di interpretasikan sebagai suatu slope rata-rata sepanjang interval. Fungsi inkremen dapat ditulis dalam bentuk umum sebagai berikut :

$$\phi\ (x_i, y_i, h) = \mathbf{(1/6)(}\boldsymbol{k_1} + 2\boldsymbol{k_2} + 2\boldsymbol{k_3} + \boldsymbol{k_4}\mathbf{)}$$

dengan setiap setiap k besarnya adalah :

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h \right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2 \right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

Semua harga k berhubungan secara rekurensi, artinya k_1 muncul dalam persamaan untuk k_2, yang muncul lagi dalam persamaan untuk k_3 dan seterusnya. Rekurensi ini membuat Metode Runge Kutta efisien untuk kalkulasi oleh komputer.

Flowchart yang menunjukkan alur kerja metode Runge Kutta dengan penempatan parameter-parameter model radang akut terlihat pada gambar 1.

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Menentukan nilai awal dari populasi patogen, populasi fagosit yang telah diaktifkan dan keruskan jaringan yaitu nilai awal $P_0 = 1$, $N*_0 = 0$ dan $D_0 = 0$. Menentukan nilai ukuran langkahnya $h = 0.5$.
2. Inisialisasi $i = 0$
3. Inisialisasi persamaan $f(x, P, N^*, D), g(x, P, N^*, D), r(x, P, N^*, D)$
4. Inisialisasi sistem persamaan diferensial:

$$\frac{dP}{dt} = 0.6P\left(1 - \frac{P}{20x10^6}\right) - \frac{0.6x0.005P}{0.002 + 0.01P} - 1.8N*P$$

$$\frac{dN*}{dt} = \frac{0.08(0.01N*+0.1P+0.02D)}{0.12+0.01N*+0.1P+0.02D} - 0.05N*$$

$$\frac{dD}{dt} = 0.35\left(\frac{N*^6}{0.46656\text{ x }10^{-13} + N*^6}\right) - 0.02D$$

5. Perhitungan untuk i = 0 sampai n-1
6. Menghitung $k_1, k_2, k_3, k_4, l_1, l_2, l_3, l_4 m_1, m_2, m_3, m_4$

$$k_1 = f(x_i, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h \right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2 \right)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$l_1 = g(x_i, y_i)$$

$$l_2 = g\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h \right)$$

$$l_3 = g\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2 \right)$$

$$l_4 = g(x_i + h, y_i + hk_3)$$

$$m_1 = r(x_i, y_i)$$

$$m_2 = r\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h \right)$$

$$m_3 = r\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}hk_2 \right)$$

$$m_4 = r(x_i + h, y_i + hk_3)$$

7. Menghitung $\boldsymbol{P_{i+1}, N*_{i+1}, D_{i+1}}$

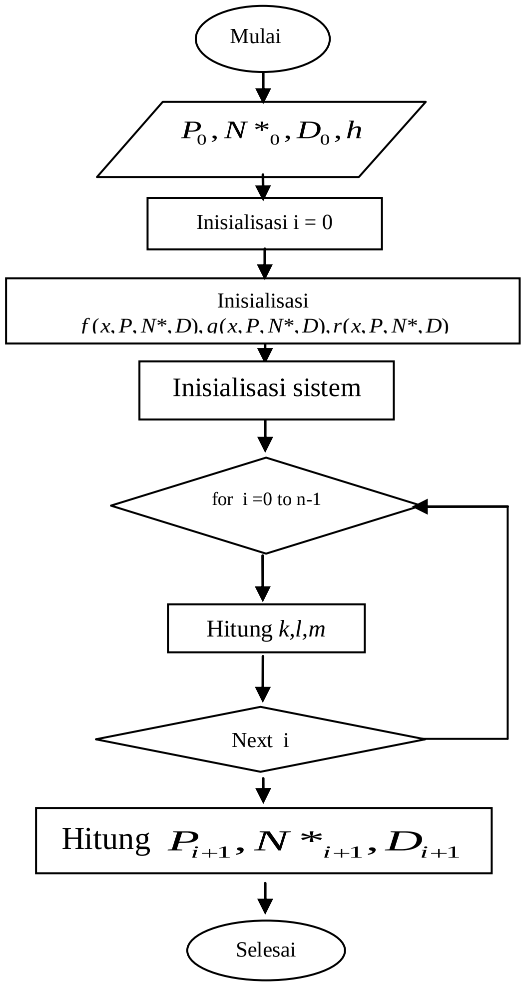
$$P_{i+1} = P_i + \left(\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right)h$$

$$N*_{i+1} = N*_i + \left(\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right)h$$

$$D_{i+1} = D_i + \left(\frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\right)h$$

8. Simpan nilai $\boldsymbol{P_{i+1}, N*_{i+1}, D_{i+1}}$ karena akan digunakan dalam perhitungan pada iterasi selanjutnya.

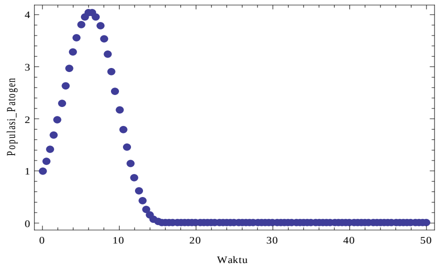
9. Mengulangi langkah 6 sampai dengan 8,
10. Lanjutkan *i*



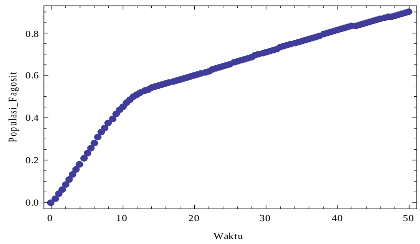
Gambar 1. Flowchart Metode Runge Kutta

Selanjutnya implementasikan langkah-langkah penyelesaian dengan menggunakan Mathematica versi 7.0. , dan diperoleh hasil seperti tampak pada gambar .

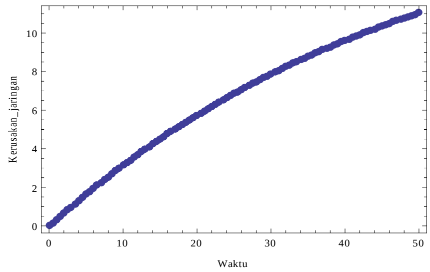
Selanjutnya dari titik-titik (P,N* dan D) dapat dilihat perilaku dinamik untuk populasi patogen, populasi fagosit yang telah diaktifkan dan banyaknya kerusakan jaringan.



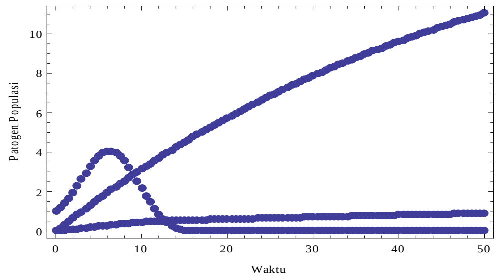
Gambar 2. Grafik Populasi Patogen



Gambar 3. Grafik Populasi Fagosit yang telah diaktifkan



Gambar 4. Grafik Laju Kerusakan Jaringan



Gambar 5. Grafik Gabungan 3 variabel

Pada Gambar 2, 3 dan 4 menunjukkan perilaku dinamik dari patogen (*P*), fagosit yang diaktifkan (*N**), dan kerusakan jaringan (*D*) terhadap waktu selama 50 jam. Populasi patogen pada awalnya bergerak naik, hal ini disebabkan karena belum ada fagosit yang diaktifkan. Kemudian pada perkembangan selanjutnya, populasi patogen terus bergerak turun, karena pada keadaan ini sudah ada fagosit yang diaktifkan. Ini bisa dilihat pada gambar 3, yaitu gambar yang menunjukkan populasi fagosit yang diaktifkan terhadap waktu. Fagosit terus bergerak naik setelah ada patogen yang menginfeksi. Sesuai dengan fungsinya, bahwa fagosit akan memakan dan memusnahkan patogen yang masuk ke dalam tubuh. Selama sistem imun dalam tubuh tetap kuat, maka semakin banyak patogen yang dimusnahkan, sehingga pada waktu tertentu patogen akan musnah.

Pada gambar 4 menunjukkan banyaknya kerusakan jaringan. Hal ini merupakan kerusakan yang ditimbulkan karena fagosit yang diaktifkan oleh adanya patogen. Karena selain memusnahkan patogen, fagosit juga dapat menyebabkan kerusakan jaringan. Dalam jumlah yang sedikit, fagosit yang diaktifkan tidak menyebabkan adanya kerusakan yang signifikan. Akan tetapi, ketika fagosit mengakumulasi dalam respon terhadap infeksi, fagosit yang diaktifkan akan menambah kerusakan jaringan. Ini juga dapat dilihat pada gambar 4 bahwa banyaknya kerusakan jaringan semakin naik, hal ini karena fagosit yang diaktifkan juga semakin meningkat.

Pada gambar 5 dapat dilihat gabungan dari perubahan populasi pathogen, perubahan populasi fagosit ketika diaktifkan dan perubahan banyaknya kerusakan jaringan. Terlihat bahwa tidak ada titik potong yang menghubungkan populasi pathogen, populasi fagosit ketika diaktifkan dan banyaknya kerusakan jaringan.

KESIMPULAN

Metode Runge Kutta merupakan metode numerik yang dapat menyelesaikan persamaan diferensial dengan langkah-langkah iterasi yang baik untuk diselesaikan dengan menggunakan komputer. Masalah persamaan diferensial nonlinear dalam model matematika pada radang akut secara analitis sulit diselesaikan, tetapi dengan Metode Runge Kutta dapat diselesaikan dan lebih efisien dengan mengimplementasikannya pada pemrograman *Mathematica* versi 7.

Solusi masalah persamaan diferensial nonlinear pada radang akut diperoleh dengan memberi nilai awal dan ukuran langkah untuk patogen, fagosit dan kerusakan jaringan. Selanjutnya dapat dimasukkan kedalam bentuk umum dari Metode Runge Kutta. Solusi tersebut dapat digambarkan dalam grafik perubahan populasi patogen, fagosit dan kerusakan jaringan terhadap waktu yang dapat diimplementasikan dalam pemrograman *Mathematica* versi 7.

DAFTAR PUSTAKA

Aryulina, Diah, dkk. 2004. *Biologi SMA untuk Kelas X.* Jakarta: Erlangga.

Conte, S. 1993. *Dasar-Dasar Analisis Numerik Suatu Pendekatan Algoritma Edisi Ketiga*. Jakarta: Erlangga.

Hariyanto. 1992. *Persamaan Diferensial Biasa*. Jakarta: Universitas Terbuka.

Pamuntjak, R.J, Santosa Widiarti. 1990. *Persamaan Diferensial Biasa*. Bandung: ITB.

Munir, R. 2003. *Metode Numerik*. Bandung : Informatika Bandung.

Raymond P. Canale, Steven C. Chapra. 1991. *Metode Numerik Untuk Teknik Dengan Penerapan Pada Komputer Pribadi*. Jakarta: Universitas Indonesia Press.

Reynolds, Angela, dkk. 2006. *A reduced mathematical model of the acute inflammatory response: I. Derivation of model and analysis of antiinflammation*. New York: Orchard Publications.

Robert D. Skeel, Jerry B. Keiper. 1993. *Elementary Numerical Computing with Mathematica*. McGraw-Hill Inc.

Sasongko, S. 2010. *Metode Numerik dengan Scilab.* Yogyakarta : ANDI Yogyakarta.

Syamsidar, H. 2009. *Metode Dekomposisi Adomian Untuk Menyelesaikan Persamaan Diferensial Abelian*. Bogor: Institut Pertanian Bogor.