

SOLUSI NUMERIK PERSAMAAN DIFUSI MENGGUNAKAN *FINITE DIFFERENCE METHOD (FDM) CRANK – NICOLSON* DALAM PENENTUAN HARGA OPSI TIPE EROPA

Shafira Fauziah Saleh¹, Embay Rohaeti², Isti Kamila³

^{1,2,3}Program Studi Matematika, Universitas Pakuan
e-mail: shafirafauziah72@gmail.com

Diterima: 25 Februari 2023, disetujui: 2 Maret 2023, dipublikasi: 14 Maret 2023

Abstract: *Unstable movements in stock values make investors have to secure the shares they own in order to minimize the risk of loss during downtrend conditions, namely with options. Finite Difference Method (FDM) Crank – Nicolson is an approach method for finding numerical solutions to option prices. The purpose of this study is to determine the price model of the European type call option and put option by transforming the stochastic differential equation into a diffusion equation form, then looking for a numerical solution using the Finite Difference Method (FDM) Crank – Nicolson to determine the price of the European type call option and put option sold at a low prices (underprice). The data used in this study are the stock price and option price of the company Apple, Inc. in November 2020 to October 2021, with an options' maturity time of 6 months from the last stock price. The results of this study obtained models for call options and European-type put options from diffusion equation transformations, and options that are sold at low prices, namely for call options with a strike price of \$75, and put options with strike prices other than \$215, \$240, \$245.*

Keywords: *Options, Finite Difference Method (FDM), Crank – Nicolson, Partial Differential Equations, Diffusion Equations.*

Abstrak: *Pergerakan nilai saham yang tidak stabil membuat para investor harus mengamankan saham yang mereka miliki agar meminimalisir risiko kerugian saat kondisi downtrend, yaitu dengan opsi. Finite Difference Method (FDM) Crank – Nicolson merupakan metode pendekatan untuk mencari solusi numerik harga opsi. Tujuan dari penelitian ini yaitu menentukan model harga opsi call dan opsi put tipe Eropa dengan mentransformasi persamaan diferensial stokastik menjadi bentuk persamaan difusi, kemudian mencari solusi numerik menggunakan Finite Difference Method (FDM) Crank – Nicolson untuk menentukan harga opsi call dan opsi put tipe Eropa yang dijual dengan harga murah (underprice). Data yang digunakan dalam penelitian ini yaitu harga saham dan harga opsi perusahaan Apple, Inc. pada November 2020 hingga Oktober 2021, dengan waktu jatuh tempo opsi 6 bulan dari harga saham terakhir. Hasil penelitian ini memperoleh model untuk opsi call dan opsi put tipe Eropa dari transformasi persamaan difusi, dan opsi yang dijual dengan harga murah, yaitu untuk opsi call dengan strike price sebesar \$75, dan opsi put dengan strike price selain dari \$215, \$240, \$245.*

Kata Kunci: *Opsi, Finite Difference Method (FDM), Crank – Nicolson, Persamaan Diferensial Parsial, Persamaan Difusi.*

1. PENDAHULUAN

Berdasarkan data pergerakan harga saham perusahaan Apple, Inc. berada di kondisi titik terendah selama tahun 2021 dengan harga penutupan 199,99 USD pada 15 Maret 2021. Setelah itu, harga saham secara relatif mengalami kenaikan dan mencapai harga tertinggi dengan harga penutupan 179,45 USD pada 6 Desember 2021. Namun, harga saham terus mengalami fluktuasi dan kembali naik hingga harga penutupan terakhir sebesar 180,33 USD pada 27 Desember 2021.

Pergerakan nilai saham yang tidak stabil membuat para investor harus mengamankan saham yang mereka miliki agar meminimalisir risiko kerugian saat kondisi *downtrend*, yaitu dengan opsi. Opsi adalah suatu perjanjian antara dua pihak yaitu penyusun kontrak opsi dan pembeli opsi, dengan harga pasar dan waktu jatuh tempo yang telah disepakati [1]. Namun, investor yang melakukan jual beli opsi sebaiknya dapat menghitung harga opsi dan mengetahui opsi pasar yang memiliki harga murah atau *underpriced* untuk memaksimalkan keuntungan. Persamaan diferensial parsial dapat digunakan untuk memodelkan harga opsi saham [2], yaitu dalam bentuk transformasi persamaan difusi dari bentuk Persamaan Diferensial Stokastik yang banyak digunakan dalam penentuan harga opsi.

Pada penelitian Sebelumnya, metode numeric digunakan untuk menentukan harga opsi tipe Eropa. Penelitian tersebut berjudul "Numerical Methods for Pricing European Options" yang diterbitkan di *International Journal of Financial Studies* pada tahun 2018. Ada beberapa metode numerik seperti Black-Scholes model, metode *binomial tree* dan simulasi Monte Carlo yang digunakan untuk menentukan harga opsi tipe Eropa. Hasil penelitian menunjukkan bahwa ketiga metode tersebut memberikan hasil yang cukup akurat namun dengan kelebihan dan kekurangan masing-masing. Oleh karena itu, masih dibutuhkan pengembangan lebih lanjut terhadap metode numerik lainnya termasuk *Finite Difference Method* (FDM) Crank-Nicolson dalam menentukan harga opsi tipe Eropa. [3]

Pada penelitian ini, penentuan harga opsi Eropa menggunakan persamaan difusi. Dalam menentukan solusi dari persamaan difusi, dibutuhkan pendekatan numerik untuk mengetahui nilai harga opsi. Penyelesaian suatu persamaan tidak selalu dapat dilakukan secara analitik, sehingga diperlukan sebuah pendekatan yaitu dengan solusi numerik [4]. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk mencari solusi numerik yaitu *Finite Difference Method* (FDM) Crank – Nicolson [5]. Oleh karena itu, tujuan penelitian ini adalah menentukan model harga opsi *call* dan opsi *put* dengan mentransformasi persamaan diferensial stokastik menjadi bentuk persamaan difusi, dan mencari solusi numerik menggunakan *Finite Difference Method* (FDM) Crank – Nicolson untuk menentukan harga opsi *call* dan opsi *put* Tipe Eropa yang dijual dengan harga murah (*underpriced*).

2. METODOLOGI PENELITIAN

2.1. Data

Data yang digunakan untuk penelitian ini yaitu data sekunder harga saham perusahaan Apple, Inc. dalam kurun waktu awal November 2020 hingga akhir Oktober 2021 (251 hari kerja) yang dapat diakses melalui www.yahoofinance.com [6], data harga opsi *call* dan opsi *put in the money* perusahaan Apple, Inc. dengan waktu jatuh

tempo 6 bulan pada tanggal 14 April 2022, lalu data suku bunga bebas risiko [7] pada tanggal 29 Oktober 2021 dengan waktu jatuh tempo selama 26 minggu sebesar 0,07% dari *Treasury Bill Rates* yang dikeluarkan oleh Pemerintah Amerika Serikat yang diakses melalui <https://www.treasury.gov> [8]

2.2. Tahapan Penelitian

1. Penentuan Harga Saham dan Opsi

Pada tahap ini dilakukan penentuan harga saham dan opsi dalam penentuan harga opsi saham. Harga saham yang digunakan yaitu harga saham hari terakhir yang diberikan dalam jangka waktu satu tahun, kemudian opsi yang digunakan yaitu opsi *call* dan opsi *put in-the money* dengan waktu jatuh tempo 6 bulan.

2. Perhitungan Deskriptif Data Saham

Pada tahapan ini dilakukan perhitungan statistika deskriptif [9] menggunakan Microsoft Excel, yang selanjutnya digunakan dalam penentuan harga opsi dengan hasil sebagai berikut.

Tabel 1. Hasil perhitungan statistika deskriptif

Statistika Deskriptif	Hasil
Rata Rata (<i>Mean</i>)	133,9
Ragam (<i>Varians</i>)	118,08
Simpangan Baku (<i>Standar Deviasi</i>)	10,87
Volatilitas	0,253

3. Transformasi Persamaan Difusi

Pergerakan harga saham [10] dengan gerak *brown* dimodelkan sebagai berikut

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB \quad (1)$$

Substitusikan fungsi tersebut kedalam persamaan lemma itô [10] sebagai berikut.

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial t} + a \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{1}{2} b^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) dt + b \frac{\partial F}{\partial x} dB(t) \quad (2)$$

Fungsi F dimisalkan sebagai fungsi harga opsi $V(S(t), t)$, kemudian hasil persamaan tersebut disubstitusikan kedalam model portofolio [11] dengan suku bunga bebas risiko sebagai berikut.

$$d\Pi = r \left(-V + \frac{\partial V}{\partial S} S \right) dt \quad (3)$$

Sehingga dihasilkan model transformasi bentuk persamaan diferensial stokastik untuk harga opsi sebagai berikut.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + rS(t) \frac{\partial V}{\partial S(t)} + \frac{1}{2} \sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V}{\partial (S(t))^2} - rV = 0 \quad (4)$$

Selanjutnya dilakukan penurunan model persamaan diferensial stokastik menjadi persamaan difusi. Langkah pertama yaitu dibentuk pemisalan sebagai berikut

$$S(t) = Ke^x \rightarrow x = \ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) \quad (5)$$

$$t = T - \frac{2y}{\sigma^2} \rightarrow y = \frac{1}{2}\sigma^2(T - t) \quad (6)$$

$$C(S(t), t) = KA(x, y) \quad (7)$$

Dari pemisalan di atas diperoleh turunan parsial sebagai berikut.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma^2 K \frac{\partial(A(x, y))}{\partial y} \quad (8)$$

$$\frac{\partial C}{\partial(S(t))} = e^{-x} \frac{\partial(A(x, y))}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial(S(t))^2} = \frac{e^{-2x}}{K} \left(\frac{\partial^2(A(x, y))}{\partial x^2} + \frac{\partial(A(x, y))}{\partial x} \right) \quad (10)$$

Substitusi (8), (9), dan (10) ke (4), maka diperoleh

$$\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (1 - b) \frac{\partial A}{\partial x} + bA = 0 \quad (11)$$

Dengan

$$b = \frac{r}{\frac{1}{2}\sigma^2} \quad (12)$$

Diperoleh pemisalan sebagai berikut.

$$A(x, 0) = \max\{e^x - 1, 0\} \quad (13)$$

Kemudian, misalkan

$$A(x, y) = e^{ix+jy}u(x, y) \quad (14)$$

Diperoleh turunan parsial sebagai berikut.

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial y} = e^{ix+jy} \left(ju + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (15)$$

$$\frac{\partial A(x, y)}{\partial x} = e^{ix+jy} \left(iu + \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 A(x, y)}{\partial x^2} = e^{ix+jy} \left(i^2u + 2i \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (17)$$

Selanjutnya, substitusi (15), (16), (17) ke (11), sehingga diperoleh hasil sebagai berikut.

$$i = -\frac{1}{2}(b - 1) \text{ dan } j = -\frac{1}{4}(b + 1)^2$$

Maka, persamaan (14) menjadi seperti dibawah ini.

$$A(x, y) = e^{-\frac{1}{2}(b-1)x - \frac{1}{4}(b+1)^2y}u(x, y) \quad (18)$$

Dari (18), diperoleh nilai $\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$ dan disubstitusikan kedalam (11) sehingga diperoleh persamaan difusi seperti dibawah ini.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (19)$$

Dengan kondisi awal sebagai berikut.

$$u(x, 0) = \max\{e^{\frac{1}{2}(b+1)x} - e^{\frac{1}{2}(b-1)x}, 0\} \quad (20)$$

4. Penentuan Fungsi Opsi Call dan Opsi Put

Selanjutnya akan ditentukan solusi $u(x, y)$ untuk opsi call yang memenuhi persamaan (19) dengan kondisi awal berikut ini.

$$u(x, 0) = f(x)$$

Dimisalkan persamaan sebagai berikut.

$$u(x, y) = F(x)G(y) \quad (21)$$

Dapat diperoleh turunan parsial di bawah ini.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = F \frac{dG}{dy}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = G \frac{dF}{dx}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = G \frac{d^2 F}{dx^2}$$

Maka persamaan difusi (19) dapat ditulis kembali sebagai berikut.

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dy} = \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} \quad (22)$$

Kedua ruas pada persamaan (22) dimisalkan dengan hasil konstanta $-n^2$ agar nilai $u(x, y)$ konvergen ke 0 untuk $y \rightarrow \infty$. Sehingga diperoleh solusi dari masing-masing ruas pada persamaan (22) sebagai berikut.

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dy} = -n^2$$

$$G = e^{-n^2 y} \quad (23)$$

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dx^2} = -n^2$$

$$F = Q \cos(nx) + R \sin(nx) \quad (24)$$

Dari persamaan (23) dan (24), didapatkan nilai $u(x, y)$ dengan $Q(n)$ dan $R(n)$ yang merupakan suatu fungsi dari n sebagai berikut.

$$u(x, y; n) = (Q(n) \cos(nx) + R(n) \sin(nx)) e^{-n^2 y}$$

Karena persamaan difusi tersebut linear dan homogen, maka

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} (Q(n) \cos(nx) + R(n) \sin(nx)) e^{-n^2 y} dn \quad (25)$$

Dengan

$$f(x) = u(x, 0) = \int_0^{\infty} (Q(n) \cos(nx) + R(n) \sin(nx)) dn$$

Persamaan di atas merupakan bentuk integral Fourier [12], maka nilai $Q(n)$ dan $R(n)$ dinyatakan sebagai berikut.

$$Q(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos(nz) dz \quad (26)$$

$$R(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sin(nz) dz \quad (27)$$

Substitusikan persamaan (26) dan (27) ke persamaan (25), sehingga diperoleh

$$u(x, y) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \cos(nz) dz \cos(nx) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \sin(nz) dz \sin(nx) \right] e^{-n^2 y} dn$$

maka

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) \int_0^{\infty} \cos n(z-x) e^{-n^2 y} dn dz \quad (28)$$

Diketahui bahwa

$$\int_0^{\infty} \cos(2vw) e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-v^2}$$

Kemudian, misalkan

$$n^2 y = w^2 \text{ atau } w = \pm n\sqrt{y}, \text{ maka } dw = \pm \sqrt{y} dn \text{ atau } dn = \pm \frac{1}{\sqrt{y}} dw$$

$$2vw = n(z-x) \text{ atau } v = \frac{n(z-x)}{2w} = \frac{n(z-x)}{2(n\sqrt{y})} = \frac{z-x}{2\sqrt{y}}$$

Maka

$$\int_0^\infty \cos n(z-x) e^{-n^2 y} dn = \int_0^\infty \cos(2vw) e^{-w^2} \frac{1}{\sqrt{y}} dw = \frac{1}{\sqrt{y}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{(z-x)^2}{4y}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{y}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4y}}$$

Kemudian, persamaan (28) menjadi

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{-\infty}^\infty f(z) e^{-\frac{(z-x)^2}{4y}} dz \quad (29)$$

Dengan kondisi awal berdasarkan persamaan (20), yaitu

$$f(z) = \max \left\{ e^{\frac{1}{2}(b+1)x} - e^{\frac{1}{2}(b-1)x}, 0 \right\}$$

Selanjutnya, substitusikan nilai $f(z)$ kedalam persamaan (29), sehingga

$$u(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(b+1)x - \frac{1}{4y}(x-z)^2} dz - \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_0^\infty e^{\frac{1}{2}(b-1)x - \frac{1}{4y}(x-z)^2} dz \quad (30)$$

Atau dimisalkan $u(x, y) = E_1 - E_2$.

Kemudian, sederhanakan bentuk integran pada E_1 dan E_2 menjadi

$$\frac{1}{2}(b+1)x - \frac{1}{4y}(x-z)^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{z - (x + y(b+1))}{\sqrt{2y}} \right]^2 + \frac{2x(b+1) + y(b+1)^2}{4}$$

$$\frac{1}{2}(b-1)x - \frac{1}{4y}(x-z)^2 = -\frac{1}{2} \left[\frac{z - (x + y(b-1))}{\sqrt{2y}} \right]^2 + \frac{2x(b-1) + y(b-1)^2}{4}$$

Dengan demikian, bentuk integral E_1 dapat ditulis sebagai berikut

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{\frac{2x(b+1) + y(b+1)^2}{4}} \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{z - (x + y(b+1))}{\sqrt{2y}} \right]^2} dz$$

Lalu, misalkan

$$h = \frac{z - (x + y(b+1))}{\sqrt{2y}}, \text{ maka } dh = \frac{1}{\sqrt{2y}} dz \text{ atau } dz = \sqrt{2y} dh$$

Kemudian tentukan nilai batas integral untuk h sebagai berikut.

$$z = 0 \leftrightarrow h = \frac{-(x + y(b+1))}{\sqrt{2y}}$$

$$z = \infty \leftrightarrow h = \infty$$

Sehingga didapatkan

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} e^{\frac{2x(b+1) + y(b+1)^2}{4}} \int_{\frac{-(x + y(b+1))}{\sqrt{2y}}}^\infty e^{-\frac{1}{2}h^2} \sqrt{2y} dh$$

$$E_1 = e^{\frac{2x(b+1) + y(b+1)^2}{4}} N(d_1)$$

Kemudian, dilakukan cara yang sama untuk E_2 dengan hasil sebagai berikut.

$$E_2 = e^{\frac{2x(b-1) + y(b-1)^2}{4}} N(d_2)$$

Nilai E_1 dan E_2 disubstitusikan kedalam persamaan (30) untuk mendapatkan

$$u(x, y) = e^{\frac{2x(b-1) + y(b+1)^2}{4}} N(d_1) - e^{\frac{2x(b-1) + y(b-1)^2}{4}} N(d_2) \quad (31)$$

Substitusikan persamaan (31) ke (18), sehingga

$$A(x, y) = e^x N(d_1) - e^{-by} N(d_2) \quad (32)$$

Berdasarkan asumsi pada persamaan (5), (6), (7) dan (12), maka diperoleh formula opsi *call* tipe eropa sebagai berikut.

$$C(S(t), t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (33)$$

Dengan menggunakan prinsip *put - call parity* [13], maka diperoleh opsi *put* tipe eropa sebagai berikut.

$$P(S(t), t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1) \quad (34)$$

Dengan nilai d_1 dan d_2 sebagai berikut.

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S(t)}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{(T-t)}} = d_1 - \sigma\sqrt{(T-t)}$$

5. Diskritisasi Persamaan Harga Opsi

Nilai maksimum dari S diasumsikan bahwa harga saham dalam kurun waktu 6 bulan selanjutnya dapat naik hingga dua kali lipat dari harga saham terakhir ($S_{max} = 2S$), dan nilai maksimum dari t adalah waktu jatuh tempo opsi tersebut ($t_{max} = T$). Diasumsikan bahwa harga opsi $V(S(t), t)$ dinyatakan oleh $V_{i,j}$. Nilai (S, t) dipartisi menjadi bentuk *grid*, dengan i dan j secara berurutan menyatakan *grid* untuk harga saham dan waktu. Interval terhadap *grid* untuk harga saham dan waktu dinyatakan dengan ΔS dan Δt .

Selanjutnya, diasumsikan pada harga saham terdapat $M + 1$ titik, yaitu $S_0, S_1, S_2, \dots, S_M$, dengan $\Delta S = S_{m+1} - S_m$ atau $\Delta S = \frac{S_{max}}{M}$. Kemudian, asumsi pada waktu terdapat $N + 1$ titik yaitu $t_0, t_1, t_2, \dots, t_N$, dengan $\Delta t = t_{n+1} - t_n$ atau $\Delta t = \frac{T}{N}$. Oleh karena itu, pada bidang (S, t) terdapat $(M + 1) \times (N + 1)$ *grid*. Titik (i, j) pada tiap *grid* menyatakan selisih harga saham ($i\Delta S$) dan selisih waktu ($j\Delta t$). Sehingga harga opsi pada harga saham S_i dan waktu t_j dinyatakan sebagai berikut.

$$V(S(t), t) = V(i\Delta S, j\Delta t) = V(S_i, t_j) = V_{i,j} \quad (35)$$

dengan $i = 0, 1, 2, \dots, M$ dan $j = 0, 1, 2, \dots, N$

6. Penentuan Nilai Awal dan Syarat Batas

a. Opsi Call

Nilai opsi *call* pada saat waktu jatuh tempo T adalah $\max(S(T) - K)$, sehingga nilai awalnya yaitu sebagai berikut.

$$v_{i,N} = \max(i\Delta S - K), i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (36)$$

Dengan batas bawah sebagai berikut.

$$v_{0,j} = 0, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (37)$$

Dan batas atas sebagai berikut.

$$v_{M,j} = K, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (38)$$

b. Opsi Put

Nilai opsi *put* pada saat waktu jatuh tempo T adalah $\max(K - S(T))$, sehingga nilai awalnya yaitu sebagai berikut.

$$v_{i,N} = \max(K - i\Delta S), i = 0, 1, 2, \dots, M \quad (39)$$

Dengan batas bawah sebagai berikut.

$$v_{0,j} = K, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (40)$$

Dan batas atas sebagai berikut.

$$v_{M,j} = 0, j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (41)$$

7. Aproksimasi Turunan Parsial

a. Aproksimasi turunan parsial yang diperoleh dari ekspansi deret Taylor [14] untuk $V(S + \Delta S, t)$ dan $V(S - \Delta S, t)$ yaitu sebagai berikut.

$$V(S + \Delta S, t) = V(S(t), t) + \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S^2 + R(\Delta S^3) \quad (42)$$

$$V(S - \Delta S, t) = V(S(t), t) - \frac{\partial V}{\partial S} \Delta S + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \Delta S^2 - R(\Delta S^3) \quad (43)$$

Persamaan beda maju dengan menggunakan persamaan (42), yaitu sebagai berikut.

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta S} \quad (44)$$

Persamaan beda mundur diperoleh dengan menggunakan persamaan (43) yaitu sebagai berikut.

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i,j} - V_{i-1,j}}{\Delta S} \quad (45)$$

Selanjutnya, persamaan beda pusat diperoleh dari hasil pengurangan persamaan (43) dari (42) sebagai berikut.

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta S} \quad (46)$$

Turunan parsial orde dua diperoleh dari hasil penjumlahan persamaan (42) dan (43) yaitu sebagai berikut.

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta S^2} \quad (47)$$

b. Ekspansi deret Taylor terhadap $V(S, t + \Delta t)$ dan $V(S, t - \Delta t)$ yaitu sebagai berikut.

$$V(S, t + \Delta t) = V(S(t), t) + \frac{\partial V}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Delta t^2 + R(\Delta t^3) \quad (48)$$

Persamaan beda maju dengan menggunakan persamaan (48), yaitu sebagai berikut.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta t} \quad (49)$$

8. Penentuan Skema Harga Opsi Crank – Nicolson

Metode Crank – Nicolson diperoleh dari hasil rata - rata metode Implisit dan metode Eksplisit [15] yaitu sebagai berikut.

$$\frac{\partial V}{\partial t} \approx \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j}}{\Delta t} \quad (50)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta S} + \frac{V_{i+1,j+1} - V_{i-1,j+1}}{2\Delta S} \right) \quad (51)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{\Delta S^2} + \frac{V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}}{\Delta S^2} \right) \quad (52)$$

Setelah itu, substitusikan persamaan (50), (51), dan (52) kedalam persamaan (4) sehingga diperoleh hasil seperti berikut.

$$\frac{1}{\Delta t} (V_{i,j+1} - V_{i,j}) + \frac{rS}{4\Delta S} (V_{i+1,j} - V_{i-1,j} + V_{i+1,j+1} - V_{i-1,j+1}) + \frac{\sigma^2 S^2}{4\Delta S^2} (V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j} + V_{i+1,j+1} - 2V_{i,j+1} + V_{i-1,j+1}) - \frac{r}{2} (V_{i,j} + V_{i,j+1}) = 0$$

Persamaan di atas dapat disederhanakan seperti di bawah ini.

$$a_i V_{i-1,j} + b_i V_{i,j} + c_i V_{i+1,j} = d_i V_{i-1,j+1} + e_i V_{i,j+1} + f_i V_{i+1,j+1} \quad (53)$$

Untuk $i = 0, 1, 2, \dots, M$ dan $j = 1, 2, \dots, N - 1$

$$\begin{aligned} a_i &= \left(-\frac{ri\Delta t}{4} + \frac{\sigma^2 i^2 \Delta t}{4} \right) & d_i &= \left(\frac{ri\Delta t}{4} - \frac{\sigma^2 i^2 \Delta t}{4} \right) \\ b_i &= \left(-1 - \frac{\sigma^2 i^2 \Delta t}{2} - \frac{r\Delta t}{2} \right) & e_i &= \left(-1 + \frac{\sigma^2 i^2 \Delta t}{2} + \frac{r\Delta t}{2} \right) \\ c_i &= \left(\frac{ri\Delta t}{4} + \frac{\sigma^2 i^2 \Delta t}{4} \right) & f_i &= \left(-\frac{ri\Delta t}{4} - \frac{\sigma^2 i^2 \Delta t}{4} \right) \end{aligned} \quad (54)$$

Bentuk umum matriks tridiagonal untuk persamaan di atas yaitu sebagai berikut.

$$\begin{bmatrix} b_0 & c_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{M-1} & b_{M-1} & c_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_M & b_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,j} \\ v_{1,j} \\ \vdots \\ v_{M-1,j} \\ v_{M,j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_0 & f_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & e_1 & f_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & d_{M-1} & e_{M-1} & f_{M-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & d_M & e_M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{0,j+1} \\ v_{1,j+1} \\ \vdots \\ v_{M-1,j+1} \\ v_{M,j+1} \end{bmatrix} \quad (55)$$

Matriks tersebut dapat dinyatakan sebagai $Av_{i,j} = Bv_{i,j+1}$ atau dapat dibentuk menjadi persamaan berikut untuk menentukan nilai dari harga opsi V .

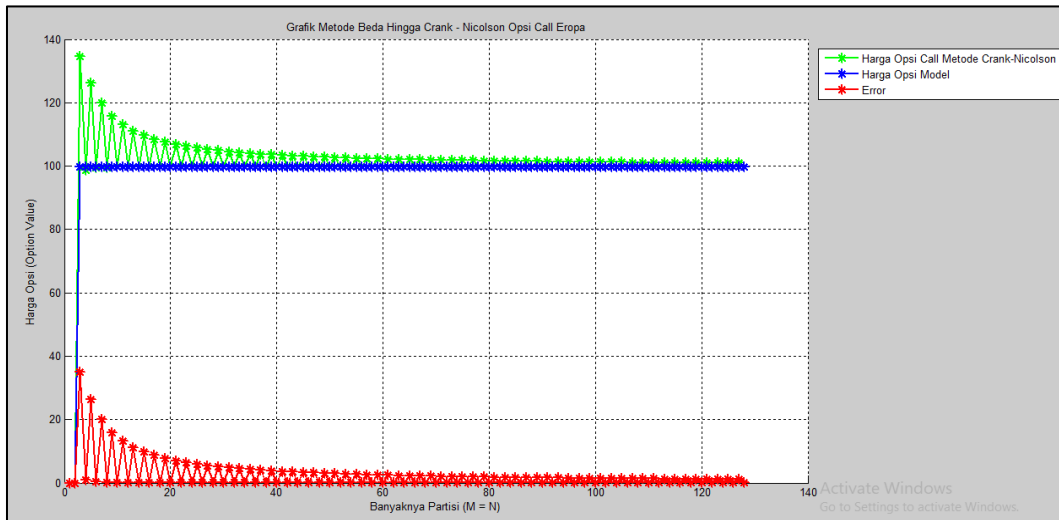
$$v_{i,j} = A^{-1}Bv_{i,j+1} \quad (56)$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

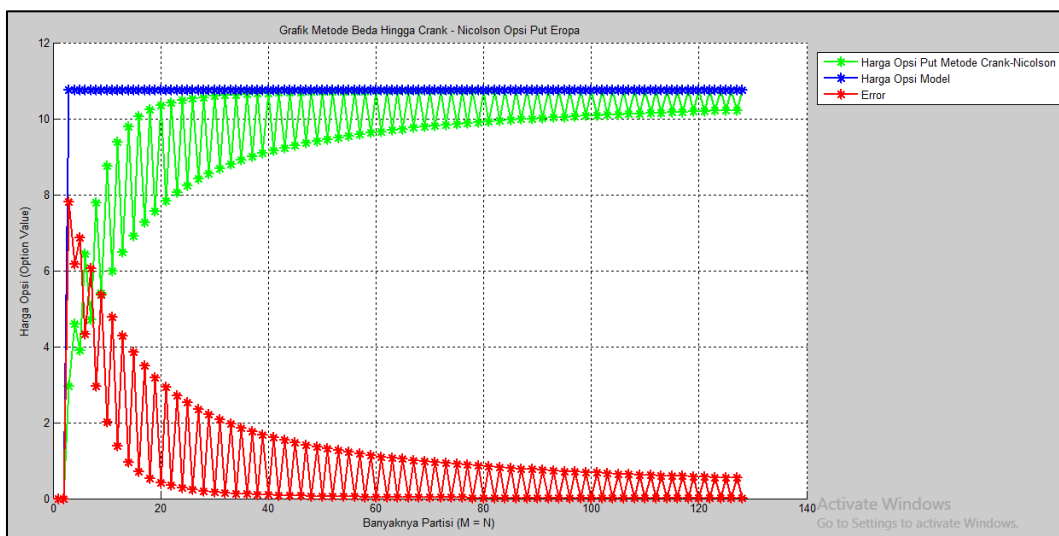
Pada tahapan ini akan dilakukan penentuan dan interpretasi hasil dari *output* harga teoritis opsi saham perusahaan Apple, Inc. dengan metode Crank - Nicolson menggunakan program Editor MATLAB. Data yang digunakan yaitu harga saham penutupan (*closed price*) terakhir dalam jangka waktu November 2020 hingga Oktober 2021, yaitu pada tanggal 29 Oktober 2021 sebesar \$149,80. Kemudian, harga opsi yang digunakan yaitu data opsi *call* dan opsi *put in-the money* dengan waktu jatuh tempo 6

bulan dari harga saham terakhir, dan suku bunga bebas risiko dari *Treasury Bill Rates* yang dikeluarkan oleh Pemerintah Amerika Serikat pada tanggal 29 Oktober 2021 dengan waktu jatuh tempo selama 26 minggu sebesar 0,07%.

Input nilai partisi ($M = N$) sebanyak 16 kali, kemudian harga saham (S) sebesar \$149,80, waktu jatuh tempo (T) selama 6 bulan atau 0,5, strike price (K) untuk opsi *call* sebesar \$50 dan opsi *put* sebesar \$150, nilai volatilitas (σ) sebesar 0,253, suku bunga bebas risiko (r) sebesar 0,06% atau 0,0006. Hasil perhitungan dan grafik pergerakan harga opsi *call* serta opsi *put* berturut turut dapat dilihat pada Gambar 1, Gambar 2, Tabel 2, dan Tabel 3 sebagai berikut.



Gambar 1. Grafik harga Opsi *Call* dengan $M = N = 128$ dan $K = \$50$



Gambar 2. Grafik harga Opsi *Put* dengan $M = N = 128$ dan $K = \$150$

Tabel 2. Hasil perhitungan Opsi *Call* dengan Metode Crank - Nicolson

OPSI CALL DENGAN NILAI M=N YANG BERVARIASI											
Harga Opsi Pasar (\$)	Harga Opsi Model (\$)	Strike Price (K)	Harga Opsi Crank - Nicolson (\$)				Error				Ket.
			16	32	64	128	16	32	64	128	
104,95	99,818	50	99,754	99,788	99,796	99,798	0,064	0,029	0,021	0,020	Jual
97,70	94,819	55	94,757	94,790	94,798	94,800	0,063	0,029	0,021	0,019	Jual
103,95	89,821	60	89,760	89,793	89,800	89,802	0,061	0,028	0,021	0,019	Jual
93,95	84,823	65	84,764	84,795	84,803	84,804	0,059	0,028	0,020	0,018	Jual
91,00	79,825	70	79,768	79,798	79,805	79,807	0,057	0,027	0,020	0,018	Jual
73,70	74,827	75	74,772	74,801	74,807	74,809	0,054	0,026	0,019	0,018	Beli
84,80	69,829	80	69,788	69,806	69,811	69,812	0,041	0,023	0,018	0,017	Jual
79,90	64,834	85	64,808	64,813	64,817	64,818	0,025	0,021	0,017	0,016	Jual
73,90	59,845	90	59,821	59,831	59,830	59,829	0,023	0,014	0,015	0,016	Jual
68,85	54,870	95	54,868	54,862	54,857	54,855	0,002	0,008	0,013	0,015	Jual
65,50	49,925	100	49,995	49,928	49,915	49,911	0,070	0,003	0,009	0,014	Jual
55,95	45,033	105	45,122	45,046	45,027	45,019	0,089	0,014	0,005	0,014	Jual
55,00	40,229	110	40,249	40,244	40,227	40,214	0,019	0,014	0,002	0,015	Jual
50,00	35,559	115	35,646	35,590	35,558	35,545	0,088	0,031	0,001	0,013	Jual
45,40	31,073	120	31,284	31,068	31,071	31,061	0,211	0,005	0,002	0,012	Jual
39,33	26,823	125	26,922	26,855	26,819	26,815	0,099	0,033	0,004	0,007	Jual
33,65	22,869	130	22,560	22,805	22,854	22,858	0,309	0,064	0,014	0,011	Jual
30,90	19,245	135	19,171	19,257	19,220	19,233	0,074	0,012	0,025	0,012	Jual
26,10	15,985	140	16,050	15,846	15,949	15,970	0,064	0,140	0,037	0,015	Jual
21,60	13,106	145	12,928	13,097	13,057	13,086	0,178	0,009	0,049	0,020	Jual

Tabel 3. Hasil perhitungan Opsi *Put* dengan Metode Crank - Nicolson

OPSI <i>PUT</i> DENGAN NILAI M=N YANG BERVARIASI											
Harga Opsi Pasar (\$)	Harga Opsi Model (\$)	Strike Price (K)	Harga Opsi Crank - Nicolson (\$)				Error				Ket.
			16	32	64	128	16	32	64	128	
6,00	10,756	150	10,053	10,605	10,722	10,749	0,704	0,151	0,034	0,007	Beli
7,75	13,626	155	13,443	13,623	13,602	13,623	0,183	0,003	0,024	0,003	Beli
9,90	16,840	160	16,833	16,742	16,825	16,840	0,008	0,099	0,015	0,001	Beli
12,18	20,369	165	20,223	20,365	20,361	20,369	0,146	0,004	0,008	0,000	Beli
14,55	24,174	170	23,888	24,127	24,172	24,174	0,286	0,047	0,002	0,000	Beli
17,85	28,219	175	28,212	28,221	28,220	28,218	0,007	0,002	0,001	0,001	Beli
20,60	32,465	180	32,536	32,456	32,469	32,464	0,070	0,009	0,004	0,002	Beli
25,15	36,879	185	36,860	36,886	36,884	36,877	0,019	0,007	0,005	0,002	Beli
28,40	41,427	190	41,417	41,439	41,432	41,427	0,011	0,012	0,005	0,000	Beli
33,65	46,084	195	46,164	46,093	46,089	46,085	0,081	0,010	0,005	0,001	Beli
37,92	50,825	200	50,912	50,844	50,829	50,826	0,087	0,019	0,005	0,001	Beli
44,45	55,632	205	55,660	55,641	55,636	55,633	0,028	0,010	0,004	0,001	Beli
47,90	60,489	210	60,540	60,508	60,492	60,490	0,051	0,019	0,003	0,001	Beli
65,40	65,384	215	65,451	65,392	65,386	65,385	0,068	0,008	0,002	0,001	Jual
60,32	70,307	220	70,363	70,323	70,309	70,308	0,056	0,016	0,002	0,001	Beli
76,85	80,211	230	80,248	80,222	80,213	80,212	0,037	0,011	0,002	0,001	Beli
97,50	90,161	240	90,187	90,168	90,162	90,161	0,026	0,007	0,002	0,001	Jual
102,45	95,145	245	95,163	95,150	95,147	95,146	0,017	0,005	0,001	0,001	Jual

Jika hasil perhitungan dengan metode Crank – Nicolson lebih besar dibandingkan dengan harga opsi pasar, maka sebaiknya tindakan yang diambil adalah membeli, karena opsi tersebut dijual murah (*underpriced*) dari harga wajar. Opsi *call* dengan *strike price* sebesar \$75, dan opsi *put* dengan *strike price* selain dari \$215, \$240, \$245 dapat dipertimbangkan untuk dibeli dikarenakan harga opsi dengan metode Crank – Nicolson lebih kecil dibandingkan harga opsi di pasar.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil yang diperoleh dalam penelitian ini, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut.

1. Model harga opsi *call* dari transformasi persamaan difusi sebagai berikut.

$$C(S(t), t) = S(t)N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$$
2. Model harga opsi *put* dari transformasi persamaan difusi sebagai berikut.

$$P(S(t), t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - S(t)N(-d_1)$$
3. Opsi *call* dengan *strike price* sebesar \$75, dan opsi *put* dengan *strike price* selain dari \$215, \$240, \$245 memiliki harga murah (*underpriced*) dikarenakan hasil perhitungan harga opsi dengan metode Crank – Nicolson lebih kecil dibandingkan harga opsi di pasar.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aziz, A. dan Wahyudi. 2014. Perbandingan Metode Beda Hingga pada perhitungan harga Opsi Asia. *Prosiding Seminar Nasional MIPA 2014*. 14 – 19.
- [2] Drábek, P. & Holubová, G. 2014. *Elements of Partial Differential Equations*. Berlin : Walter de Gruyter GmbH & Co KG.
- [3] Oksendal, B. 2013. *Stochastic Differential Equations : An Introduction with Applications*. Oslo : Springer
- [4] Sinopa, *et al.* 2020. Hampiran solusi Persamaan Panas Dimensi Satu dengan Metode Beda Hingga Crank – Nicolson. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. dan Terapannya (BIMASTER)* **9(1)**: 195 - 204.
- [5] Zain, *et al.* 2018. Analisis konvergensi Metode Beda Hingga dalam menghampiri Persamaan Difusi. *E – Jurnal Matematika* **7(1)**: 1 - 4. Universitas Telkom, Jawa Barat.
- [6] Yahoo Finance. 2021. *Apple, Inc. (AAPL) Stock Price, News, Quote & History*. <https://finance.yahoo.com/quote/AAPL?p=AAPL> [Diakses pada tanggal 25 Maret 2022]
- [7] Ramadhan, *et al.* 2021. Pengaruh inflasi dan suku bunga acuan terhadap pergerakan harga saham perbankan di Indonesia. *Prosiding Pendidikan Matematika Dan Matematika*. **3(9)**.
- [8] U.S. Department of The Treasury. 2021. *Daily Treasury Bill Rates Data*. <https://www.treasury.gov/resource-center/data-chart-center/interest-rates/Pages/TextView.aspx?data=billrates> [Diakses pada tanggal 14 Maret 2022]
- [9] Huwaida, H. 2019. *Statistika Deskriptif*. Banjarmasin : POLIBAN PRESS
- [10] Lusiana, *et al.* 2018. Simulasi pergerakan harga saham menggunakan pendekatan Metode Monte Carlo. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. Dan Terapannya (BIMASTER)* **7(2)**: 119 - 126.
- [11] Binatari, *et al.* 2013. Penentuan harga opsi saham Tipe Amerika dengan pembagian deviden menggunakan Finite Element Method. *Jurnal Penelitian Saintek*. **18(2)**: 59 – 72
- [12] Wrede, R & Spiegel, M.R. 2007. *Kalkulus Lanjutan, Edisi Kedua*. Jakarta : Penerbit Erlangga.
- [13] Susanti, D dan Devianto, D. 2014. Penurunan Model Black Scholes dengan Persamaan Diferensial Stokastik untuk Opsi Tipe Eropa. *Jurnal Matematika UNAND* **3(1)**: 17 - 26.
- [14] Amodio, *et al.* 2017. A generalized Taylor Method of order three for the solution of initial value problems in standard and infinity floating-point arithmetic. *Mathematics and Computers in Simulation* **141(4)**: 24 - 39.
- [15] Oktaviani, *et al.* 2020. Metode Beda Hingga Eksplisit dan Implisit untuk menyelesaikan Persamaan Panas. *Buletin Ilmiah Mat. Stat. Dan Terapannya (BIMASTER)* **9(2)**: 301 - 310.