

METODE *QUADRATIC SPLINE* DAN HELIGMAN-POLLARD DALAM PENYUSUNAN *LIFE TABLE* DESA GEGELANG LOMBOK BARAT

Andri Azmul Fauzi¹, Endar Hasafah Nugrahani², Hadi Sumarno³

^{1*} Program Studi Matematika, Universitas Nahdlatul Wathan Mataram

^{2,3} Departemen Matematika, IPB University

e-mail: andriazmulfauzi@unwmataram.ac.id

Diterima: 3 Maret 2023 , disetujui: 7 Maret 2023, dipublikasi: 20 Maret 2023

Abstract: *In this paper, we conduct research by compiling an abridged life table using the graduation method based on real data obtained at Gegelang Village, West Lombok. The graduation method used in this study included quadratic spline and Heligman-Pollard. Based on the results, a special case of A-method was chosen as a method used to make a rough life table before graduation. After graduation process, it was found that the most suitable method was the Heligman-Pollard method. This is based on the graph produced using this method which is monotonous in nature, not fluctuating like other graduation methods. In addition, life expectancy obtained at 65,72 years is close to West Lombok's life expectancy based on 2015.*

Keywords: *graduation process, life table, life expectancy*

Abstrak: Dalam penelitian ini, dilakukan penelitian dengan menyusun sebuah *life table* ringkas menggunakan metode graduasi berdasarkan data *real* yang diperoleh di Desa Gegelang, Lombok Barat. Metode graduasi yang digunakan dalam penelitian ini adalah *quadratic spline* dan Heligman-Pollard. Berdasarkan hasil perhitungan, dipilih metode *special case of A* sebagai metode yang digunakan untuk membuat *life table* kasar sebelum graduasi. Setelah proses graduasi, didapatkan metode yang paling cocok adalah metode Heligman-Pollard. Hal ini didasarkan pada grafik yang dihasilkan dengan menggunakan metode ini yang sifatnya monoton, tidak fluktuatif seperti metode graduasi lainnya. Selain itu, angka harapan hidup yang diperoleh 65,72 tahun mendekati angka harapan hidup Lombok Barat berdasarkan tahun 2015.

Kata Kunci: Proses Graduasi, *Life Table*, Angka Harapan Hidup

1. PENDAHULUAN

Penduduk adalah aset nyata dari suatu bangsa. Banyak faktor yang dapat mempengaruhi perkembangan penduduk baik secara kualitas maupun kuantitas. Kualitas hidup yang dimiliki suatu negara ataupun wilayah, menjelaskan tentang kesejahteraan rakyat serta keberhasilan dari banyaknya program yang telah dirancang oleh pemerintah untuk meningkatkan derajat kehidupan manusia. Kualitas hidup dapat dilihat dari angka harapan hidup. Angka Harapan Hidup (AHH) pada suatu umur tertentu menjelaskan tentang rata-rata tahun hidup yang akan dijalani oleh seseorang yang telah berhasil mencapai umur tersebut dalam situasi kematian yang berlaku di lingkungan masyarakat [6].

Fakta menunjukkan bahwa AHH negara maju berbeda dengan negara berkembang. Hal ini dapat kita lihat dari kondisi sosial ekonomi suatu negara yang sangat berpengaruh terhadap besar kecilnya AHH. Untuk melihat AHH dari suatu negara, bisa kita lihat dari tabel hayat atau *life table* yang dimiliki oleh negara tersebut. *Life table* adalah tabel yang

menggambarkan tentang peluang bertahan hidup sampai umur tertentu dari tahun kelahirannya [2].

Sampai saat ini Indonesia masih belum memiliki *life table* yang diperoleh dari data kematian menurut umur yang dapat digunakan terutama untuk menghitung AHH. *Life table* yang sampai sekarang masih digunakan berupa pendekatan yang disesuaikan dengan *Life Table Coale-Demeny Model Barat*. Riyana (2018) telah melakukan penelitian tentang menentukan metode terbaik untuk menduga *life table* penduduk lanjut usia di Indonesia. Untuk menduga *complete life table*, digunakan beberapa metode graduasi, antara lain metode Kostaki, Heligman-Pollard, Elandt-Johnson, dan beberapa metode penduga *complete life table* lansia dengan metode Heligman-Pollard yang dimodifikasi dengan menggunakan laju kematian dari distribusi Gompertz dan Makeham. Dari penelitian tersebut didapatkan bahwa metode Heligman-Pollard merupakan metode graduasi terbaik untuk menduga *complete life table* dari beberapa metode yang digunakan. Terdapat lima tujuan yang didapatkan dari proses graduasi antara lain menghaluskan data sehingga data menjadi teratur dan konsisten, membuat hasil yang tepat dan sesuai dalam menghaluskan kurva berdasarkan data, membantu untuk menyimpulkan data yang tidak sempurna, memberi kemudahan dalam membandingkan angka kematian, dan membantu peramalan [1].

Berdasarkan permasalahan di atas, pada penelitian ini akan direkonstruksi *life table* berdasarkan data *real* di Desa Gegalang Lombok Barat setelah sebelumnya dilakukan penghalusan model dengan menggunakan metode graduasi. Secara khusus, tujuan penelitian ini adalah menduga peluang kematian, menentukan *life table* kasar, melakukan graduasi, serta menentukan model *life table* yang sesuai berdasarkan beberapa metode yang digunakan.

2. METODOLOGI PENELITIAN

2.1 Data

Pada penelitian ini, data yang digunakan adalah data *real* yang didapatkan dari Desa Gegalang Lombok Barat. Adapun data yang diambil untuk penelitian ini adalah data populasi penduduk tahun 2016, data kelahiran periode 2014-2018, dan data kematian periode 2014-2018. Setelah pengambilan data, langkah selanjutnya adalah menghitung parameter q (peluang kematian) menggunakan *method of moment estimator* atau metode momen sehingga didapatkan model *life table* kasar. Selanjutnya, melakukan graduasi terhadap *life table* kasar menggunakan metode graduasi. Metode graduasi yang digunakan adalah metode Heligman-Pollard dan *quadratic spline*. Setelah dilakukan graduasi, langkah selanjutnya memilih model *life table* berdasarkan dua model yang didapatkan.

2.2 Tahapan Analisis

Menghitung Peluang Kematian untuk Sampel Data Tidak Lengkap Menggunakan Metode Momen

Sampel data tidak lengkap adalah suatu kasus dimana pada saat periode pengamatan telah berakhir masih ada individu yang bertahan hidup [4]. Untuk menghitung peluang kematian untuk sampel data tidak lengkap ketika pengamatan dilakukan, perlu diketahui vektor umur dan vektor durasinya. Vektor umur (\mathbf{v}'_i) didefinisikan sebagai $\mathbf{v}'_i = [y_i, z_i, \theta_i]$, dimana y_i merupakan umur eksak saat mulai pengamatan pada individu, z_i adalah umur eksak saat periode pengamatan telah berakhir, dan θ_i merupakan umur eksak saat kematian selama proses pengamatan. Sedangkan vektor durasi ($\mathbf{u}'_{i,x}$) didefinisikan

sebagai $\mathbf{u}'_{i,x}=[r_i, s_i, t_i]$, dimana x merupakan umur individu amatan ke- i , r_i adalah nilai awal amatan, s_i adalah nilai akhir amatan, dan t_i adalah nilai saat terjadi kematian selama pengamatan [4]. Vektor durasi ($\mathbf{u}'_{i,x}$) dihitung untuk mengetahui nilai awal dan nilai akhir pengamatan individu ke- i pada setiap interval umur $(x, x + 5]$.

Nilai harapan kematian pada interval umur $(x, x + 5]$ jika terdapat N_x individu yang diamati adalah

$$E(D_x) = \sum_{i=1}^{N_x} s_{i-r_i} q_{x+r_i}. \quad (1)$$

Untuk metode *general case* diasumsikan $0 \leq r_i < 5$, $0 < s_i \leq 5$, $0 \leq t_i < 5$ dimana $t_i < s_i$, dan $t_i = s_i$ untuk $\delta_i = 0$ serta $t_i = t_i$ untuk $\delta_i = 5$, dengan menyamakan jumlah kematian terhadap nilai harapannya, maka didapatkan persamaan momennya yaitu

$$E(D_x) = \sum_{i=1}^{N_x} t_{i-r_i} q_{x+r_i}^G = D_x. \quad (2)$$

Selanjutnya jika diasumsikan $t_{i-r_i} q_{x+r_i}^G \approx (t_i - r_i) \cdot q_x^G$, maka persamaan (2) dapat diformulasikan juga dalam bentuk

$$E(D_x) = q_x^G \cdot \sum_{i=1}^{N_x} (t_i - r_i) = D_x, \quad (3)$$

sehingga didapatkan penduga parameter q -nya untuk setiap interval umur $(x, x + 5]$ yaitu

$$\hat{q}_x^G = \frac{D_x}{\sum_{i=1}^{N_x} (t_i - r_i)}. \quad (4)$$

Untuk *special case A*, dengan menyamakan jumlah kematian terhadap nilai harapannya, jika terdapat N_x individu yang diamati pada interval umur $(x, x + 5]$, dengan mengasumsikan $r_i = 0$ dan $s_i = 5$ maka didapatkan persamaan momennya yaitu

$$E(D_x) = N_x \cdot q_x^A = D_x, \quad (5)$$

sehingga penduga parameter q -nya untuk setiap interval umur $(x, x + 5]$ adalah

$$\hat{q}_x^A = \frac{D_x}{N_x}. \quad (6)$$

Pada metode *special case B*, dengan menyamakan jumlah kematian terhadap nilai harapannya, diasumsikan $0 \leq r_i < 5$ dan $s_i = 5$, dan terdapat N_x individu yang diamati pada interval umur $(x, x + 5]$, sehingga didapatkan persamaan momennya yaitu

$$E(D_x) = \sum_{i=1}^{N_x} 1 - r_i q_{x+r_i}^B = D_x. \quad (7)$$

Selanjutnya dengan menggunakan asumsi Balducci yaitu ${}_{b-a}q_{x+a} = \frac{(b-a)q_x}{1-(1-b)q_x}$, maka persamaan (7) juga dapat diformulasikan dalam bentuk

$$E(D_x) = q_x^B \cdot \sum_{i=1}^{N_x} (1 - r_i) = D_x, \quad (8)$$

sehingga didapatkan penduga parameter q -nya untuk setiap interval umur $(x, x + 5]$ yaitu

$$\hat{q}_x^B = \frac{D_x}{\sum_{i=1}^{N_x} (1 - r_i)}. \quad (9)$$

Untuk *special case C* dengan menyamakan jumlah kematian terhadap nilai harapannya, diasumsikan $r_i = 0$ dan $0 < s_i \leq 5$, dan terdapat N_x individu yang diamati pada interval umur $(x, x + 5]$, maka didapatkan persamaan momennya yaitu

$$E(D_x) = \sum_{i=1}^{N_x} s_i q_x^C = D_x. \quad (10)$$

Selanjutnya dengan menggunakan asumsi *uniform distribution of deaths* yaitu

${}_{b-a}q_{x+a} = \frac{(b-a)q_x}{1-a \cdot q_x}$, maka persamaan (10) juga dapat diformulasikan dalam bentuk

$$E(D_x) = q_x^C \cdot \sum_{i=1}^{N_x} s_i = D_x, \quad (11)$$

sehingga didapatkan penduga parameter q -nya untuk setiap interval umur $(x, x + 5]$ adalah

$$\hat{q}_x^C = \frac{D_x}{\sum_{i=1}^{N_x} s_i}. \quad (12)$$

Pada pendekatan Hoem, dengan mengasumsikan lamanya waktu keikutsertaan individu ke- i pada interval umur $(x, x + 5]$ dari mulai bergabung (r_i) sampai waktu akhir bergabung (s_i) meskipun terjadi kematian (t_i) yang artinya $t_i = s_i$, maka dengan menyamakan jumlah kematian terhadap nilai harapannya, didapatkan persamaan momennya yaitu

$$E(D_x) = \sum_{i=1}^{N_x} s_i - r_i q_{x+r_i}^H = D_x. \quad (13)$$

Selanjutnya jika diasumsikan $s_i - r_i q_{x+r_i}^H \approx (s_i - r_i) \cdot q_x^H$, maka persamaan (13) juga dapat diformulasikan juga dalam bentuk

$$E(D_x) = q_x^H \cdot \sum_{i=1}^{N_x} (s_i - r_i) = D_x, \quad (14)$$

sehingga didapatkan penduga parameter q -nya untuk setiap interval umur $(x, x + 5]$ yaitu

$$\hat{q}_x^H = \frac{D_x}{\sum_{i=1}^{N_x} (s_i - r_i)}. \quad (15)$$

Pada pendekatan aktuarial, diasumsikan bahwa setiap individu ke- i yang mati pada interval umur $(x, x + 5]$, maka individu tersebut mencapai batas akhir interval umur $(x, x + 5]$ yang artinya $s_i = 5$, maka dengan menyamakan jumlah kematian terhadap nilai harapannya didapatkan persamaan momennya yaitu

$$E(D_x) = \sum_{i=1}^{N_x} (s_i - r_i q_{x+r_i}^L + 1 - s_i q_{x+s_i}^L \delta_i) = D_x. \quad (16)$$

Selanjutnya jika diasumsikan $\sum_{i=1}^{N_x} s_i - r_i q_{x+r_i}^L + 1 - s_i q_{x+s_i}^L \delta_i \approx (s_i - r_i) \cdot q_x^L + (5 - s_i) \cdot q_x^L \cdot \delta_i$, maka persamaan (16) dapat diformulasikan juga dalam bentuk

$$E(D_x) = q_x^L \cdot \sum_{i=1}^{N_x} (s_i - r_i) + q_x^L \cdot \sum_{i=1}^{N_x} (1 - s_i) \delta_i = D_x, \quad (17)$$

sehingga didapatkan penduga parameter q untuk setiap interval umur $(x, x + 5]$ yaitu

$$\hat{q}_x^L = \frac{D_x}{\sum_{i=1}^{N_x} (s_i - r_i) + \sum_{i=1}^{N_x} (1 - s_i) \delta_i}. \quad (18)$$

Proses Graduasi

Metode graduasi pertama yang digunakan adalah *quadratic spline*. Fungsi *quadratic spline* (Q) merupakan potongan-potongan polinomial kuadrat pada interval $[a, b]$ yang memiliki bentuk

$$Q(x) = \begin{cases} Q_0(x) & ; \quad x \in [t_0, t_1] \\ Q_1(x) & ; \quad x \in [t_1, t_2] \\ \vdots & \\ Q_{n-1}(x) & ; \quad x \in [t_{n-1}, t_n]. \end{cases}$$

Untuk setiap interval $[t_i, t_{i+1}]$, $Q_i(x)$ didefinisikan sebagai

$$Q_i(x) = \left(\frac{z_{i+1} - z_i}{2(t_{i+1} - t_i)} \right) (x - t_i)^2 + z_i(x - t_i) + y_i. \quad (19)$$

Koefisien z_0, z_1, \dots, z_n dihasilkan dengan cara memilih nilai z_0 . Kemudian untuk z_1, z_2, \dots, z_n dicari dengan menggunakan persamaan $z_{i+1} = -z_i + 2 \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \right)$, dimana $(0 \leq i \leq n - 1)$.

Metode graduasi kedua yang digunakan adalah metode Heligman-Pollard yang merupakan salah satu metode interpolasi yang dapat mempresentasikan kematian pada rentang waktu seluruh kehidupan. Misalkan suatu fungsi didefinisikan dengan $F(x; c)$ yakni fungsi dengan variabel umur x dan c yang merupakan vektor parameter pada persamaan tersebut, maka persamaan Heligman-Pollard akan menjadi:

$$\frac{q_x}{p_x} = F(x; c) \quad (20)$$

dengan $F(x; c) = GH^x$ [3].

Hubungan ${}_nq_x$ dengan q_x pada metode Heligman-Pollard adalah

$${}_nq_x = 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q_{x+i}). \quad (21)$$

Persamaan (21) pada metode Heligman-Pollard dapat dibuktikan sebagai berikut

$$\begin{aligned} {}_np_x &= 1 - {}_nq_x \\ &= 1 - \frac{{}_nd_x}{l_x} \\ &= \frac{l_{x+n}}{l_x} \\ &= \frac{l_{x+1} l_{x+2} \dots l_{x+n}}{l_x l_{x+1} \dots l_{x+n-1}} \\ &= p_x p_{x+1} \dots p_{x+n-1} \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i} \\ {}_nq_x &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} p_{x+i} \\ {}_nq_x &= 1 - \prod_{i=0}^{n-1} (1 - q_{x+i}). \end{aligned}$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Perhitungan Life Table Kasar

Berdasarkan data Desa Gegelang, didapatkan *life table* kasar yang dihitung dengan menggunakan metode momen yang hasil perhitungan angka harapan hidupnya disajikan pada Tabel 1.

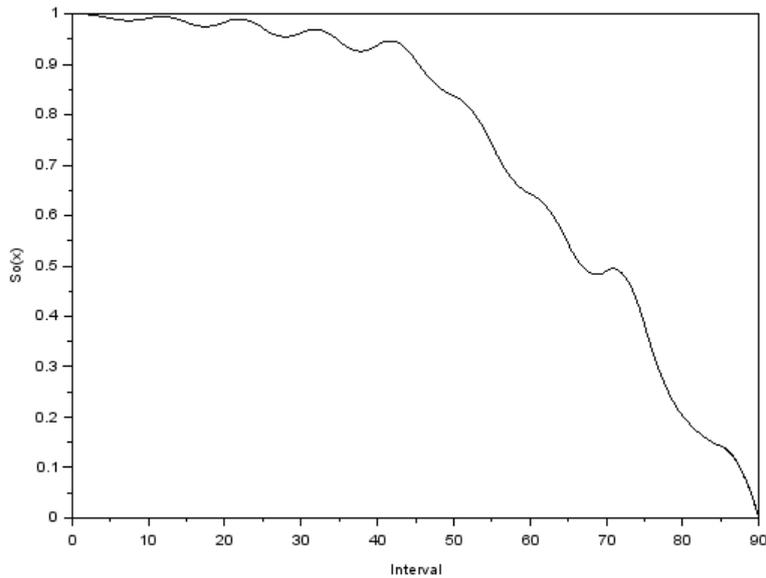
Table 1 Hasil perhitungan angka harapan hidup *life table* kasar

No	Metode	Angka Harapan Hidup
1	General case	72,79
2	Special case A	62,21
3	Special case B	76,49
4	Special case C	75,60
5	Pendekatan Hoem	72,92
6	Pendekatan aktuaria	72,93

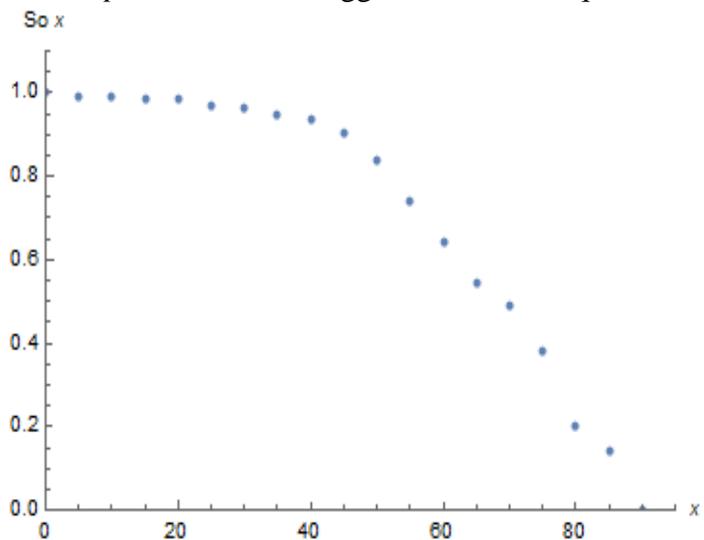
Berdasarkan Tabel 1, didapatkan angka harapan yang berbeda-beda. Nilai terbesar didapatkan dengan menggunakan metode *special case B*, sedangkan nilai terkecil didapatkan dengan menggunakan metode *special case A*. Hal ini disebabkan karena menggunakan metode dan kondisi data yang berbeda-beda. Misalkan pada metode *special case A* menggunakan data kelompok, sedangkan metode *general case* menggunakan data lengkap.

Model Graduasi

Untuk melakukan graduasi, akan dipilih satu metode yang mendekati angka harapan hidup Kabupaten Lombok Barat. Pada tahun 2015, diketahui angka harapan hidup Kabupaten Lombok Barat adalah 65,10 tahun. Berdasarkan Tabel 1, dipilih metode *special case A* karena angka harapan hidup yang dihasilkan mendekati angka harapan hidup Kabupaten Lombok Barat pada tahun 2015. Setelah dilakukan graduasi terhadap *life table* kasar tersebut, maka didapatkan grafik seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1 Grafik *special case A* menggunakan metode *quadratic spline*



Gambar 2 Grafik *special case A* menggunakan metode Heligman-Pollard

Berdasarkan Gambar 2 di atas, dapat dilihat bahwa grafik yang dibuat dengan menggunakan metode *quadratic spline* bersifat fluktuatif dan tidak monoton turun jika dibandingkan dengan grafik yang dibuat dengan menggunakan metode Heligman-Pollard yang monoton turun. Selain itu, setelah dilakukan perhitungan didapatkan angka harapan hidup yang berbeda-beda. Angka harapan hidup dengan menggunakan metode *quadratic spline* didapatkan sebesar 65,80. Sedangkan menggunakan metode Heligman-Pollard didapatkan sebesar 65,72 tahun.

Pemilihan Model *Life Table*

Pemilihan model *life table* didasarkan pada model grafik dan angka harapan hidup yang paling mendekati angka harapan hidup Kabupaten Lombok Barat tahun 2015. Perlu diketahui, suatu *life table* dikatakan baik apabila garis yang dihasilkan bersifat monoton turun. Berdasarkan gambar grafik di atas, dari kedua grafik yang dihasilkan, model grafik Heligman-Pollard bisa dikatakan sesuai. Hal ini dikarenakan garis yang dihasilkan

monoton turun jika dibandingkan dengan model *quadratic spline*. Pada model *quadratic spline*, grafik yang dihasilkan fluktuatif dan tidak monoton turun seperti telah dijelaskan sebelumnya. Sedangkan angka harapan hidup yang paling mendekati angka harapan hidup Kabupaten Lombok Barat tahun 2015 adalah angka harapan hidup yang dihasilkan dengan menggunakan metode Heligman-Pollard.

Berdasarkan uraian di atas, model *life table* yang sesuai adalah model *life table* yang dihasilkan dengan menggunakan metode Heligman-Pollard. Adapun hasil perhitungan lengkap model *life table* dengan menggunakan metode Heligman-Pollard disajikan pada Tabel 3.

Table 3 *Life Table* menggunakan metode Heligman-Pollard

X	l_x	${}_n d_x$	${}_n L_x$	T_x	e_x
0	100000	193	99904	6571826	65,72
1	99807	519	398191	6471923	64,84
5	99288	527	495125	6073732	61,17
10	98762	523	492502	5578606	56,49
15	98239	478	490001	5086105	51,77
20	97761	568	487387	4596104	47,01
25	97194	523	484661	4108717	42,27
30	96671	1045	480741	3624057	37,49
35	95625	1568	474207	3143316	32,87
40	94057	3659	461139	2669109	28,38
45	90398	6795	435003	2207970	24,42
50	83603	9409	394493	1772967	21,21
55	74194	10454	344835	1378474	18,58
60	63740	9932	293871	1033639	16,22
65	53808	4678	257348	739768	13,75
70	49131	11004	218145	482420	9,82
75	38127	18295	144898	264275	6,93
80	19832	5873	84479	119378	6,02
85+	13960	13960	34899	34899	2,50

Ke depannya, *life table* yang disusun dengan menggunakan metode Heligman-Pollard di atas diharapkan dapat dijadikan sebagai dasar oleh aparat Desa Gegeleng Lombok Barat untuk membuat kebijakan yang dapat meningkatkan kesejahteraan rakyat.

4. KESIMPULAN

Metode terbaik yang digunakan dalam membuat *life table* kasar adalah metode *special case A*. Setelah dilakukan graduasi terhadap *life table* kasar didapatkan metode graduasi yang paling sesuai diantara dua model graduasi yang digunakan, yaitu metode Heligman-Pollard. Selain itu, berdasarkan data Desa Gegeleng pada tahun 2014-2018 dengan menggunakan metode momen untuk *special case A* dan metode graduasi Heligman-Pollard diperoleh angka harapan hidup sebesar 65,72 tahun.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Barnett HAR. 1985. Criteria of smoothness. *Journal of the Institute of Actuaries*, 11: 331 -367.
- [2] Brown RL. 1997. *Introduction to the mathematics of demography (Third Edition)*. Winsted (Conecticut): Actex Publication.
- [3] Heligman L, Pollard JH. 1980. The age pattern of mortality. *Journal of the Institute of Actuaries*, 107: 49-80.
- [4] London D. 1997. *Survival Models and Their Estimation (Third Edition)*. Winsted (Connecticut): Actex Publication.
- [5] Riyana M. 2018. Penentuan metode terbaik untuk menduga life table penduduk lanjut usia di Indonesia [Tesis]. Bogor (ID): Institut Pertanian Bogor.
- [6] Utomo B. 1985. *Mortalitas: pengertian dan contoh kasus di Indonesia*. Jakarta (ID): Universitas Indonesia.