E-ISSN : 2809-3755
P-ISSN: 2809-3526
INTERVAL: Jurnal Ilmiah Matematika
Volume 3, No. 1, Maret 2023, pp. 46-54

PENYELESAIAN MASALAH *CUTTING STOCK* DENGAN PENGELASAN MENGGUNAKAN TEKNIK *COLUMN GENERATION*

Kamal Isham[1], Khusnul Novianingsih[2*], Kartika Yulianti
[1,2,3] Program Studi Matematika, Universitas Pendidikan Indonesia
e-mail: khusnuln@upi.edu

Diterima: 27 Februari 2023, disetujui: 7 Maret 2023, dipublikasi: 17 Maret 2023

Abstract**:** *The cutting stock problem with welding is a problem for cutting a number of raw materials into a number of cutting patterns to meet every demand such that the raw material needed is minimum. In this study, column generation techniques are used to solve the problem. The technique contains two models i.e the master model and the column generator submodel. The master model is a linear programming model that is used to determine the minimum number of raw materials needed to meet the needs according the cutting patterns. The submodel is constructed to generate a new cutting pattern that will improve the optimal solution of the master model. The column generation step is complete if there is no cutting pattern that can give the better solution. Since column generation technique does not always produce integer solutions, an additional mixed integer programming model is needed to meet unmet demands. The computationl results show that column generation techniques can solve cutting stock problems with welding, and it can give an optimal solution.*
Keywords*: linear programming, integer programming, column generation, cutting stock problems with welding*

Abstrak**:** *Masalah cutting stock dengan pengelasan adalah permasalahan pemotongan dan pengelasan sejumlah bahan baku menjadi pola-pola tertentu untuk memenuhi permintaan dengan bahan baku sesedikit mungkin. Pada penelitian ini, masalah cutting stock dengan pengelasan diselesaikan menggunakan teknik column generation. Teknik column generation memuat dua model, yaitu model master dan submodel pembangkit kolom. Model master adalah model linear programming untuk menentukan banyaknya bahan baku minimum yang diperlukan untuk memenuhi permintaan. Submodel pembangkit kolom berjutuan untuk membentuk pola baru yang akan dimuat pada model master. Pembangkitan kolom selesai dilakukan ketika solusi dari model master sudah tidak dapat memberikan solusi yang lebih baik dari solusi pada tahapan sebelumnya. Karena teknik column generation tidak selalu menghasilkan solusi bilangan bulat, maka dibangun model tambahan mixed integer programming untuk memenuhi permintaan yang belum terpenuhi. Hasil implementasi menunjukkan bahwa teknik column generation dapat menyelesaikan masalah cutting stock dengan pengelasan dan mampu memberikan solusi optimal.*
Kata Kunci*: linear programming, integer programming, column generation,* permasalah *cutting stock* dengan pengelasan

1. PENDAHULUAN

Sistem pemadam kebakaran yang diadakan pada suatu bangunan diatur dalam peraturan Mentri Pekerjaan Umum Nomor 20/PRT/M/2009. *Sprinkler* adalah salah satu alat bagian dari sistem pemadam kebakaran gedung yang bekerja memancarkan air bertekanan tinggi secara otomatis. Sistem *sprinkler* merupakan bagian instalasi dari gedung, supaya ketika terjadi kebakaran bisa diatasi dengan baik dan cepat. Membangun sistem aliran *sprinkler* di suatu gedung melibatkan banyak pipa dengan berbagai ukuran. Pipa yang digunakan umumnya memiliki diameter yang sama tapi dengan ukuran yang bervariasi. Untuk menyusun *sprinkler*, pabrik akan memotong pipa sesuai kebutuhan dan juga dilakukan pengelasan.

Di bidang riset operasi, masalah pemotongan pipa sesuai dengan yang dibutuhkan dengan biaya minimum dikenal dengan sebutan *cutting stock problem.* Masalah pengelasan 2 pipa atau lebih disebut dengan *skiving stock problem* [1]. Masalah *cutting stock* dan masalah *skiving stock* sering dijumpai juga pada industri kaca, kertas, baja, dan karet. Pada awalnya, masalah *cutting stock* hanya berdasarkan ukuran panjang (satu dimensi). Selanjutnya, masalah *cutting stock* berkembang menjadi masalah *cutting stock* dua dimensi, dimana bahan baku berbentuk persegi panjang dipotong menjadi persegi panjang dengan ukuran permintaan.

Masalah *cutting stock* termasuk dalam kategori *large scale* dan NP-*hard problem.* Pola pemotongan yang mungkin dari sebuah masalah *cutting stock* jumlahnya sangat banyak dan jumlah tersebut akan meningkat secara eksponensial seiring bertambahnya permintaan. Dengan demikian, menyelesaikan masalah *cutting stock* dengan mencari semua pola pemotongan yang mungkin adalah tidak efisien. Oleh karena itu dibutuhkan teknik penyelesaian yang efisien yang memberikan solusi yang optimal. Araujo [2] menggunakan teknik heuristik untuk menyelesaikan *cutting stock* yaitu dengan mengiplementasikan algoritma *evolutionary*. Gilmore dan Gomory [3], mengusulkan sebuah teknik untuk menyelesaikan masalah *cutting stock* satu dimensi, yaitu teknik *column generaiton* [3].

Teknik *column generation* banyak digunakan untuk menyelesaikan masalah program linear berukuran besar. Teknik *column generation* mempunyai kelemahan yaitu tidak dapat memberikan solusi bilangan bulat. Jika solusi pembulatan diperoleh dari pembulatan solusi program linear, maka dapat mengakibatkan solusi hasil pembulatan bukan merupakan solusi fisibel. Sejumlah peneliti telah melakukan penelitan agar dapat memberikan solusi berupa bilangan bulat [4, 5, 6].

Menyelesaikan masalah *cutting stock* dengan algorima heuristik tidak menjamin solusi optimal, tetapi mendekati optimal. Sedangkan solusi yang diperoleh *column generation* adalah solusi optimal dalam masalah *linear programming*. Oleh karena itu,e teknik *column generation* membutuhkan prosedur tambahan untuk menyelesaikan masalah *integer programming*.

Penelitian ini membahas masalah *cutting stock* dengan pengelasan yang merupakan gabungan dari masalah *cutting stock* dengan masalah *skiving stock*. Pada masalah *cutting stock* dengan pengelasan, permintaan dapat dipenuhi dengan 2 cara, yaitu dengan memotong stok atau memotong stok yang sudah dilas. Masalah *cutting stock* dengan pengelasan tersebut diselesaikan menggunakan teknik *column generation*. Model *integer programming* dilibatkan untuk memenuhi kekurangannya sehingga diperoleh solusi bilangan bulat [4].

2. METODOLOGI PENELITIAN

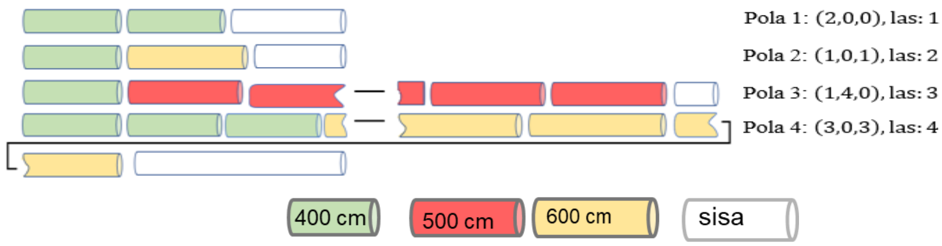
Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai masalah *cutting stock* dengan pengelasan, Model *column generation* dan *Mixed integer programming*.

2.1 Masalah *Cutting Stock* Dengan Pengelasan

Masalah *cutting stock* dengan pengelasan dapat diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan terdapat bahan baku dengan ukuran L dan n jenis permintaan dengan panjang l_i, masing-masing diminta sebanyak d_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Selanjutnya, permintaan disebut sebagai final. Tujuan dari penelitian ini adalah untuk menentukan banyaknya bahan baku minimum yang digunakan untuk memenuhi semua permintaan.

Pola pemotongan dan pengelasan direpresentasikan dalam matriks A yang berukuran $m \times n$, dimana m menyatakan banyaknya permintaan dan n menyatakan banyaknya pola pemotongan dengan pengelasan. Pengelasan dalam pola direpresentasikan dalam matriks W yang berukuran $1 \times n$, dimana n berasosiasi dengan kolom pada matriks A. Selanjutnya, permintaan disebut sebagai final.

Misalkan terdapat bahan baku berukuran 1300 cm dengan permintaan final berukuran 400 cm, 500 cm, dan 600 cm. Misalkan pula konsumen meminta setiap final masing-masing sebanyak 7, 4, dan 4 buah. Salah satu cara pola pemotongan dan pengelasan untuk memenuhi permintaan diilustrasikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Contoh pola pemotongan dan pengelasan

Empat pola pemotongan tersebut direpresentasikan sebagai matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2.2 Model *Column Generation*

2.2.1 Model Master

Misalkan terdapat n jenis final dengan ukuran i dengan permintaan masing-masing d_i. Dimisalkan pula bahwa P adalah himpunan pola pemotongan dengan pengelasan dan didefinisikan a_{ij} sebagai banyaknya final f_i yang diperoleh jika bahan baku terpilih sebagai pola j. Jika w_j menyatakan banyaknya pengelasan pada sebuah pola j, dengan mendefinisikan x_j sebagai banyaknya bahan baku dipotong dan dilas dengan pola j. Masalah *cutting stock* dengan pengelasan dapat direpresentasikan sebagai program linear berikut:

Meminumkan: $$\sum_{j\in P} x_j\left(w_j+1\right),$$

terhadap:

$$\sum_{j\in P} a_{ij}x_j \geq d_i, \quad i=1,2,\dots,n$$

$$x_j \in \{0,1\}, \forall\, j \in P,$$

$$w_j \geq 0, w_j \in \mathbb{Z}, \forall\, j \in P.$$

2.2.2 Submodel Pembangkit Kolom

Teknik *column generation* dikenal oleh Gilmore dan Gomory [3]. Teknik ini didasari oleh metode simpleks direvisi, dimana untuk dapat menentukan solusi fisibel basis dari $(n+m)\times(n+m)$ submatriks dari matriks koefisien yang nonsingular. Submatriks disebut matriks basis, dan dinotasikan dengan $\boldsymbol{B}$. Untuk mencari matriks $\boldsymbol{B}$ pada model master, cukup dengan mencari $(n\times n)$ submatriks yang merepresentasikan n buah pola pemotongan dan pengelasan yang berbeda untuk setiap bahan baku. Submatriks $(n\times n)$ ini dinotasikan $\boldsymbol{D}$. Pola pemotongan dan pola pengelasan ini bisa diawali dengan memilih sebuah matriks diagonal orde n dimana setiap entri dari diagonal ke-i berisikan jumlah final i maksimum yang mungkin ditempatkan pada sebuah bahan baku. $m\times(n\times m)$ submatriks sisanya adalah matriks yang setipa entrinya bernilai 1. Setelah menentukan matriks $\boldsymbol{B}$, solusi fisibel diperoleh dari relasi $x_B = B^{-1}b$, dimana $b = n_i$.

Untuk menentukan apakah solusi yang diperoleh optimal atau tidak, sebuah kolom $y = (y_1,\dots,y_n)^T$ dibangkitkan. Misal π adalah *shadow price* dalam pengelasan dari matriks $\mathbf{cP}^{-1}$ dengan $\mathbf{c}$ adalah matriks baris berdimensi m yang entriknya adalah banyaknya pengelasan setiap pola pemotongan dengan pengelasan. $\mathbf{P}$ adalah matriks diagonal berode m yang semua entrinya bernilai 1. *Reduced cost* yang berasosiasi dengan basis $\boldsymbol{B}$ untuk setiap bahan baku adalah:

$$(w+1) - \sum_{i\in D}\lambda_i y_i - \pi w$$

Shadow price λ dengan elemen λ_i, $i=1,2,\dots,n$ adalah $\lambda = 1_m D^{-1}$ adalah *shadow price* yang berasosiasi dengan masing-masing final i, dimana 1_m adalah matriks baris berdimensi m yang semua entriknya bernilai 1. Kondisi optimal tercapai jika minimum *reduced cost* bernilai non negative. Jika *reduced cost* bernilai negative, kolom baru y akan masuk sebagai basis. Kolom baru akan terus dibangkitkan selama kondisi optimal model master belum tercapai [4].

Solusi optimal akan menghasilkan pola pemotongan dan pengelasan yang fisibel dengan nilai *reduced cost* yang berasosiasi dengan x_B untuk setiap bahan baku minimum. Dengan kata lain, *reduced cost* $\sum_{i\in D}\frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1}$ akan menjadi fungsi objektif. Pada submodel pembangkit kolom dicari pola pemotong dan pengelasan yang akan menjadi pola baru pada model master, dimana panjang seluruh yang dimuat oleh sebuah pola merepresentasikan kolom baru tidak melebihi bahan baku (L) yang memuat w pengelasan. Banyaknya bahan baku minimum yang dibutuhkan adalah akumulasi panjang dari setiap final yang dimuat pada bahan baku yang disusun sesedikit mungkin. Jadi, K=$\left\lceil\frac{\sum_{i\in D} l_i d_i}{L}\right\rceil$. Submodel direpresentasikan sebagai berikut:

Maksimumkan:
$$\sum_{i\in D}\frac{\lambda_i y_i - \pi w}{w+1}$$

Terhadap:
$$\sum_{i\in D} l_i y_i \le L + wL$$
$$w \le K-1, \quad i$$
$$y_i \ge 0, y_i \in Z, \;\; i = 1,2,\dots,n.$$

2.3 *Mixed Integer Programming* (*MIP*)

Masalah *cutting stock* dengan pengelasan yang sudah diselesaikan dengan teknik *column generation* memperoleh solusi optimal berupa bilangan yang tidak bulat. Untuk memperoleh solusi bilangan bulat diperlukan model tambahan, yaitu model *Mixed Integer Programming* (MIP) [4]. Misalkan F himpunan final yang belum terpenuhi. Banyaknya bahan baku yang akan memehuni permintaan adalah sebagai berikut:
$$min_{ekstra} = \left\lceil\frac{\sum_{i\in F} l_i d_i}{L}\right\rceil$$

Banyaknya bahan baku tambahan dinotasikan $card(T) = min_{ekstra}$. Dinotasikan $k \in K$ himpunan pola pemotongan, $t \in T$ himpunan baha baku tambahan.
Adapun variabel keputusan pada model didefinisikan sebagai berikut:

x_{ik} = banyaknya final i pada pola pemotongan k

T_t^k= sisa pemotongan dari bahan baku t dengan pola pemotongan k

Banyak bahan baku yang digunakan untuk menjadi pola potong dalam memehuni final yang belum diproduksi pada teknik *column generation* ditentukan sebelum model MIP yang direpesentasikan sebagai berikut.
$$minimum: \sum_{t\in T}(ord(t) - card(T) - 1)\, T_t^k$$
$$\sum_{i\in F} l_i x_{ik} + T_t^k = L \;\; \forall k \in K$$
$$T_t^k \ge 0\,, x_{ik} \ge 0$$

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Misalkan tersedia bahan baku berukuran 37 dengan pemintaan 10 jenis final dan banyaknya permitaan setiap final yang representasikan pada Tabel 1. Misalkan pola pemotongan awal dari masalah di atas direpresentasikan dalam bentuk matriks berikut.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Tabel 1. Bahan baku dan setiap jenis dengan banyaknya permintaan final

Bahan baku (cm)		
37		
Final	Ukuran final	Banyaknya permintaan
1	10	50
2	5	115
3	2	125
4	10	80
5	5	50
6	15	100

Permasalahan tesebut dapat dimodelkan sebagai berikut:
Meminimumkan:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 + x_{10}$$

Terhadap

$$\begin{aligned} 3x_1 &\geq 50 \\ 7x_2 &\geq 115 \\ 15x_3 &\geq 125 \\ 3x_4 &\geq 80 \\ 8x_5 &\geq 50 \\ 2x_6 &\geq 100 \\ 4x_7 &\geq 57 \\ x_8 &\geq 10 \\ x_9 &\geq 15 \\ 2x_{10} &\geq 2, \end{aligned}$$

$$x_j \in \{0,1\}, \forall\, j = 1,2,\dots,10,$$
$$w_j \geq 0, w_j \in Z, \forall\, j = 1,2,\dots,10.$$

Model master diselesaikan kemudian dilanjutkan ke submodel pembangkit kolom dengan tujuan untuk mengetahui apakah solusi dari model master sudah optimal atau belum. Jika model master belum optimal, maka kolom baru dibangkitkan. Iterasi dilanjutkan untuk membangkitkan kolom hingga model master optimal.

Model *column generation* untuk masalah *cutting stock* dengan pengelasan diselesaikan dengan menggunakan *software* optimasi Lingo 18.0v. Tabel 2 merepresentasikan pola pemotongan awal. Solusi optimal dari model master dengan pola awal disajikan pada Tabel 3

Menggunakan data pada Tabel 2, solusi dari model master dengan pola awal adalah 166.095 bahan baku. Solusi sudah memenuhi permintaan, tetapi bukan solusi optimal karena hasil *reduced cost* dari submodel pembangkit kolom adalah 18. Karena nilai submodel lebih dari 1 maka model master harus ditambahkan pola pemotongan dengan pengelasan yang dibangkitkan submodel pembangkit kolom. Iterasi pada teknik *column generation* berhenti jika nilai *reduced cost* dari submodel pembangkit kolom bernilai kurang dari atau sama dengan 1. Dalam kasus ini teknik *column generation* mengalami 11 iterasi untuk mendapat solusi optimal pada model master.

Tabel 2 Pola pemotongan awal

Final	Pola pemotongan awal									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2

Pola pemotongan dengan pengelasan berisi 21 pola yang telah dibangkitkan dan terpilih sebagai pola untuk mendapatkan solusi optimum pada model master. Pola ini dituliskan pada Tabel 3. Solusi optimal dari model master untuk memenuhi permintaan membutuhkan 138.2702602 bahan baku. Karena solusi tidak menghasilkan bilangan bulat, maka untuk mendapatkan solusi bilangan bulat hasil dari column generation dibulatkan ke bawah. Solusi bilangan bulat dari Tabel 4 adalah 117 bahan baku untuk memenuhi permintaan. Hasil ini menunjukkan bahwa masih dibutuhkan bahan baku tambahan untuk memenuhi permintaan yang belum terpenuhi akibat pembulatan ke bawah.

Tabel 3 Pola pepotongan dengan pengelasan dari solusi teknik *column generation*

	Pola pemotongan dengan pengelasan																				
Las	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	4	14	9	7	9	4	0	12	11	0
Final	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
1	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0	0
2	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
4	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0	0	0	0	1
7	0	0	0	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	37	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	1
9	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	37	0

Tabel 4 Solusi teknik column generation dan pembulatan ke bawah dari solusi teknik *column generation*

Pola terpilih	Las	Solusi	Setelah dilas	Pembulatan ke bawah	setelah dilas
11	1	2.702703	5.405406	2	4
12	4	3.108108	15.54054	3	15
13	14	2.432432	36.48648	2	30
14	9	2.162162	21.62162	2	20
s15	7	1.540541	12.324328	1	8
16	9	1.351351	13.51351	1	10
17	4	1.351351	6.756755	1	5
18	0	15	15	15	15
20	11	0.135135	1.6216212	0	0
21	0	10	10	10	10
Total bahan baku			138.2702602		117

Tabel 5 Permintaan final yang belum terpenuhi dan pola pemotongan tambahan

Final	Belum terpenuhi	Pola pemotongan									Total
1	13	3	0	0	0	0	2	0	0	0	
2	4	0	0	0	1	0	0	0	0	0	
3	26	3	1	0	1	1	1	10	0	0	
4	6	0	0	0	0	2	0	0	0	0	
5	13	0	7	0	0	0	0	1	1	1	
6	16	0	0	0	2	1	1	0	0	0	
7	20	0	0	0	0	0	0	0	4	1	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
10	5	0	0	3	0	0	0	1	0	2	

Bahan baku tambahan	1	1	1	4	3	5	1	5	1	22

Tabel 5 menunjukan pola pemotongan tambahan untuk memenuhi permintaan yang kurang dari master model yang diselesaikan dengan teknik *column generation*. Pola dan banyaknya bahan baku terepresentasikan pada Tabel 5 ada sebanyak 22 bahan baku untuk memenuhi permitaan. Jadi, dibutuhkan 117 bahan baku dan solusi dari model MIP adalah 22 bahan baku. Oleh karena itu, sebanyak 139 bahan baku yang dibutuhkan untuk memenuhi permintaan.

4. KESIMPULAN

Teknik *column generation* dapat diaplikasikan untuk menyelesaikan model masalah *cutting stock* dengan pengelasan dengan memodifikasi model master dan submodel pembangkit kolom. Solusi bilangan bulat diperoleh dari pembulatan ke bawah solusi optimal hasil tenik *column generation* ditambah dengan bahan baku tambahan yang dibutuhkan untuk memenuhi kekurangan pada permintaan dengan model *mixed integer programming*

DAFTAR PUSTAKA

[1] Agoston, K. C. (2019). The Effect of Welding on the One-Dimensional Cutting-Stock Problem: The Case of Fixed Firefighting Systems in the Construction Industry. *Andvances in Operations Research*, 1-12.

[2] Araujo, S. A. (2011). An evolutionary algorithm for the one-dimensional cutting stock problem. *International Transactionin Operations Research*, **18(1)**: 155-127.

[3] Gilmore, P. C. dan Gomory, R. C. (1963). A linear programming approach to the cutting stock problem path 2. *Operations Research*, **11(6)**: 868-888.

[4] Novianingsih, K. (2007). Column Generation Technique for Solving Two-Dimensional Cutting Stock Problems: method of stripe approach. *Journal of the Indonesian Mathematical Society*, **13(2)**: 161-172.

[5] Vance, P. H. (1994). Solving Binary cutting stock problems by column generation and branch-bound. *Computational Optimization and Applications*, **3(2):** 111-130.

[6] Wacher, G. H. (2007). An Improvement typology of cutting stock and packing problem. *European Journal of Operations Research*, **183(6)**: 1109-1130.