KOMPUTASI: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer dan Matematika
Vol.18, No.1, Januari 2021, Hal. 29 – 35
P-ISSN: 1693-7554, E-ISSN: 2654-3990
https://journal.unpak.ac.id/index.php/komputasi

ELEMEN IDEMPOTEN DI GELANGGANG $\mathbb{Z}_n$ DAN KAITANNYA DENGAN HOMOMORFISMA GELANGGANG

Ricky Aditya[1], Maria Vianney Any Herawati[2]
[1,2] Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Kampus III Paingan, Maguwoharjo, Depok, Sleman, Daerah Istimewa Yogyakarta 55281

Corresponding Author: rickyaditya@usd.ac.id

Abstrak

Homomorfisma gelanggang merupakan salah satu topik yang dipelajari dalam perkuliahan aljabar abstrak untuk jenjang S1. Definisi dari homomorfisma gelanggang merupakan perluasan dari definisi homomorfisma grup, dengan sifat "mengawetkan struktur" berlaku untuk kedua operasi binernya. Karena aksiomanya lebih banyak, akan lebih sulit untuk mencari contoh-contoh dari homomorfisma gelanggang daripada contoh-contoh homomorfisma grup. Dalam makalah ini akan dikaji suatu karakterisasi dari homomorfisma gelanggang untuk kasus spesifik dari $\mathbb{Z}_m$ *ke* $\mathbb{Z}_n$ *yang ternyata berkaitan erat dengan elemen idempoten di gelanggang* $\mathbb{Z}_n$*. Karakterisasi lebih detail untuk berbagai macam kemungkinan keterkaitan antara nilai* m *dan* n *juga akan dipaparkan. Dengan menggunakan karakterisasi-karakterisasi tersebut, akan lebih mudah bagi para dosen pengampu mata kuliah aljabar abstrak dalam memberikan contoh-contoh homomorfisma gelanggang.*

Kata kunci: *Gelanggang; homomorfisma gelanggang; elemen idempoten*

Abstract

Ring homomorphism is one of the topics in abstract algebra course for undergraduate students. The definition of ring homomorphism is an extension of the definition of group homomorphism, in which the "structure-preserving" property holds for both binary operations. Since it has more axioms, it will be more difficult to find examples of ring homomorphism than examples of group homomorphism. In this paper some characterizations of ring homomorphism for specific cases from $\mathbb{Z}_m$ *to* $\mathbb{Z}_n$ *will be discussed, which are found out to be closely related with idempotent elements in ring* $\mathbb{Z}_n$*. More detailed characterizations for various possible relations between values of* m *and* n *will also be presented. By using those characterizations, it will be easier for lecturers of abstract algebra course in giving examples of ring homomorphism.*

Keywords: *Ring; ring homomorphism; idempotent element*

1. Pendahuluan

Dalam pembelajaran aljabar abstrak untuk jenjang S1, khususnya mengenai teori grup, gelanggang dan lapangan, himpunan sisa pembagian bilangan bulat modulo n (n suatu bilangan asli), yang dinotasikan dengan $\mathbb{Z}_n$, sering digunakan sebagai contoh untuk mengilustrasikan suatu struktur yang merupakan himpunan berhingga. Sesuai definisinya, anggota-anggota dari $\mathbb{Z}_n$ adalah 0, 1, 2, …, $n-1$, sehingga $\mathbb{Z}_n$. merupakan himpunan berhingga dengan n anggota. Secara struktur, $\mathbb{Z}_n$ merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahan modulo n dan merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo n [1]. Lebih lanjut, jika n merupakan bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_n$ merupakan lapangan [2].

Tidak cukup sulit untuk menjelaskan struktur dari $\mathbb{Z}_n$ beserta operasi-operasinya, baik dalam konteks teori grup maupun teori gelanggang. Akan tetapi perlu lebih hati-hati saat membahas homomorfisma, karena tidak semua homomorfisma grup merupakan homomorfisma gelanggang. Dalam beberapa kasus tertentu, tidak selalu mudah dalam mencari contoh homomorfisma gelanggang. Dalam makalah ini akan dibicarakan beberapa karakterisasi dari homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_m$ ke $\mathbb{Z}_n$ beserta kaitannya dengan elemen idempoten di gelanggang $\mathbb{Z}_n$. Dengan menggunakan karakterisasi-karakterisasi tersebut, akan lebih mudah bagi para dosen pengampu mata kuliah aljabar abstrak dalam memberikan contoh-contoh dari homomorfisma gelanggang.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini dilakukan dengan menggunakan metode studi literatur. Mula-mula dibicarakan terlebih dahulu mengenai gelanggang dan homomorfisma gelanggang, yang merupakan bagian dari perkuliahan mata kuliah wajib struktur aljabar untuk jenjang S1. Selanjutnya dibicarakan mengenai salah satu elemen gelanggang dengan sifat khusus, yaitu elemen idempoten, beserta sifat-sifatnya.

2.1. Gelanggang dan Homomorfisma Gelanggang

Perkuliahan struktur aljabar pada jenjang S1 umumnya dibagi ke dalam dua mata kuliah, yang pertama mengkaji teori grup, sedangkan yang kedua mengkaji teori gelanggang dan lapangan. Pembahasan dalam makalah ini akan difokuskan pada $\mathbb{Z}_n$ sebagai suatu gelanggang. Mula-mula diberikan pengertian dari gelanggang.

Definisi 2.1.1. [1], [3] *Suatu himpunan A merupakan gelanggang terhadap operasi $\oplus$ dan $\otimes$ (berturut-turut disebut penjumlahan dan perkalian pada A) jika berlaku:*

a) *Untuk setiap $a,b \in A$, $a \oplus b, a \otimes b \in A$ (operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat tertutup di A).*
b) *Untuk setiap $a,b,c \in A$, $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ dan $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ (operasi $\oplus$ dan $\otimes$ bersifat asosiatif).*
c) *Terdapat $0_A \in A$ sedemikian hingga untuk setiap $a \in A$ berlaku $0_A \oplus a = a \oplus 0_A = a$ (eksistensi elemen identitas penjumlahan).*
d) *Untuk setiap $a \in A$ terdapat $(-a) \in A$ sedemikian hingga $a \oplus (-a) = (-a) \oplus a = 0_A$ (setiap elemen A memiliki invers terhadap penjumlahan).*
e) *Untuk setiap $a,b \in A$, $a \oplus b = b \oplus a$ (operasi $\oplus$ bersifat komutatif).*
f) *Untuk setiap $a,b,c \in A$, $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$ dan $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ (berlaku sifat distributif).*

Jika ditinjau strukturnya terhadap masing-masing operasi, setiap gelanggang merupakan grup komutatif terhadap operasi penjumlahannya dan merupakan semigrup terhadap operasi perkaliannya. Suatu gelanggang A dikatakan gelanggang dengan elemen satuan jika A juga memiliki elemen identitas terhadap operasi perkaliannya, yang biasa dinotasikan dengan 1_A. Suatu gelanggang dikatakan gelanggang komutatif jika operasi perkaliannya juga bersifat komutatif. Gelanggang komutatif dengan elemen satuan yang setiap elemen tak nol-nya memiliki invers terhadap perkalian disebut lapangan [3].

Selain himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$, himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}$ dan himpunan bilangan real □ , yang kesemuanya merupakan gelanggang terhadap operasi penjumlahan dan perkalian biasa, contoh lain yang sering dibicarakan adalah $\mathbb{Z}_n$ yang merupakan gelanggang terhadap operasi penjumlahan dan perkalian modulo n. Lebih spesifik lagi, $\mathbb{Z}_n$ juga memiliki elemen identitas terhadap perkalian, yaitu 1 dan operasi perkalian di $\mathbb{Z}_n$ juga komutatif, sehingga $\mathbb{Z}_n$ merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan. Khusus jika n merupakan bilangan prima, $\mathbb{Z}_n$ merupakan lapangan.

Meskipun dua buah gelanggang merupakan himpunan yang berbeda dengan operasi-operasi penjumlahan dan perkalian yang berbeda, tetapi ada kemungkinan bahwa sebenarnya secara struktur keduanya "sama". Hal ini yang memunculkan pengertian homomorfisma gelanggang, yaitu suatu pemetaan antara dua buah gelanggang yang "mengawetkan struktur".

Definisi 2.1.2. [1], [3] *Diberikan gelanggang-gelanggang* $(A,+_A,\cdot_A)$ *dan* $(K,+_K,\cdot_K)$. *Suatu pemetaan* $f : A \to K$ *dikatakan homomorfisma gelanggang jika untuk setiap* $x, y \in A$ *berlaku:*

a) $f(x +_A y) = f(x) +_K f(y)$,
b) $f(x \cdot_A y) = f(x) \cdot_K f(y)$.

Berdasarkan Definisi 2.1.2, konteks "mengawetkan struktur" dapat diartikan sebagai berikut: "jika dua buah elemen gelanggang dioperasikan dulu baru dipetakan, maka hasilnya akan sama dengan jika masing-masing elemen tersebut dipetakan dulu baru dioperasikan". Dalam teorema berikut dijelaskan dua buah sifat sederhana yang berlaku pada homomorfisma gelanggang.

Teorema 2.1.3. [1] *Jika* f *suatu homomorfisma gelanggang dari gelanggang* $(A,+_A,\cdot_A)$ *ke gelanggang* $(K,+_K,\cdot_K)$, *maka berlaku:*

a) $f(0_A) = 0_K$, *dengan* 0_A *dan* 0_K *berturut-turut adalah elemen identitas penjumlahan di gelanggang* A *dan* K.
b) $f\left(\underbrace{x +_A x +_A \ldots +_A x}_{n \text{ kali}}\right) = \underbrace{f(x) +_K f(x) +_K \ldots +_K f(x)}_{n \text{ kali}}$, *untuk setiap* $x \in A$ *dan untuk setiap bilangan asli* n.

Bukti:

a) Berdasarkan sifat elemen identitas penjumlahan, untuk setiap $x \in A$ berlaku $0_A +_A x = x$ dan $0_K +_K f(x) = f(x)$ (karena $f(x) \in K$). Dengan demikian dari sifat homomorfisma diperoleh $0_K +_K f(x) = f(x) = f(0_A +_A x) = f(0_A) +_K f(x)$. Menggunakan hukum kanselasi diperoleh $0_K = f(0_A)$.
b) Pembuktian dapat dilakukan menggunakan induksi matematis. Untuk $n = 1$ diperoleh kesamaan $f(x) = f(x)$, sehingga jelas berlaku untuk setiap $x \in A$. Selanjutnya diasumsikan pernyataan benar untuk $n = k$ (k suatu bilangan asli), akan dibuktikan pernyataan juga benar untuk $n = k+1$. Berdasarkan asumsi, untuk setiap $x \in A$ berlaku:

$$f\left(\underbrace{x +_A x +_A \ldots +_A x}_{k \text{ kali}}\right) = \underbrace{f(x) +_K f(x) +_K \ldots +_K f(x)}_{k \text{ kali}}.$$

Karena f homomorfisma gelanggang, diperoleh:

$$\begin{aligned} f\left(\underbrace{x +_A x +_A \ldots +_A x}_{k+1 \text{ kali}}\right) &= f\left(\left(\underbrace{x +_A x +_A \ldots +_A x}_{k \text{ kali}}\right) +_A x\right) = f\left(\underbrace{x +_A x +_A \ldots +_A x}_{k \text{ kali}}\right) +_K f(x) \\ &= \left(\underbrace{f(x) +_K f(x) +_K \ldots +_K f(x)}_{k \text{ kali}}\right) +_K f(x) \\ &= \underbrace{f(x) +_K f(x) +_K \ldots +_K f(x)}_{k+1 \text{ kali}} \end{aligned}$$

Jadi pernyataan terbukti untuk $n = k+1$. Dengan demikian pernyataan berlaku benar untuk setiap bilangan asli n. □

Setiap gelanggang merupakan grup (komutatif) terhadap operasi penjumlahannya. Jika pada Definisi 2.1.2 hanya aksioma a) yang terpenuhi, maka pemetaan tersebut hanya merupakan homomorfisma grup. Artinya setiap homomorfisma gelanggang pasti merupakan homomorfisma grup (jika gelanggang dipandang sebagai grup terhadap operasi penjumlahannya), tetapi sebaliknya belum tentu berlaku. Sebagai contoh pemetaan $f : \mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$ dengan definisi

$f(x) = 2x(\mathrm{mod}\,6)$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_6$ merupakan homomorfisma grup (terhadap operasi penjumlahan modulo 6) karena:

$$f(x+y) = 2(x+y)(\mathrm{mod}\,6) = (2x+2y)(\mathrm{mod}\,6) = 2x(\mathrm{mod}\,6) + 2y(\mathrm{mod}\,6) = f(x) + f(y).$$

Akan tetapi f bukan homomorfisma gelanggang karena $f(5) = 4$, tetapi:

$$f(5 \cdot 5) = f(1) = 2(\mathrm{mod}\,6) = 2 \neq f(5) \cdot f(5) = (4 \cdot 4)(\mathrm{mod}\,6) = 4.$$

Oleh karena itu akan lebih sulit untuk menemukan contoh homomorfisma gelanggang jika dibandingkan dengan homomorfisma grup, termasuk untuk gelanggang $\mathbb{Z}_n$. Pada bagian selanjutnya akan dijelaskan beberapa karakterisasi homomorfisma gelanggang pada $\mathbb{Z}_n$, atau secara umum dari $\mathbb{Z}_m$ ke $\mathbb{Z}_n$, dengan m dan n dua bilangan asli yang dapat berbeda.

2.2. Elemen Idempoten dari Suatu Gelanggang dan Sifat-sifatnya

Pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$, operasi yang berlaku adalah penjumlahan dan perkalian modulo n. Prinsipnya kurang lebih seperti penjumlahan dan perkalian bilangan bulat biasa, hanya hasilnya dikerjakan dalam modulo n, yaitu menghitung sisa pembagiannya jika dibagi dengan n. Oleh karena itu akan ada beberapa elemen yang memiliki sifat tertentu, yang tidak selalu dijumpai pada sebarang gelanggang.

Definisi 2.2.1. [4] *Diberikan gelanggang $(A, +_A, \cdot_A)$. Suatu elemen $x \in A$ dikatakan elemen idempoten jika $x^2 = x \cdot_A x = x$.*

Contoh 2.2.2.
Pada sebarang gelanggang dengan elemen satuan $(A, +_A, \cdot_A)$, dua elemen identitas 0_A dan 1_A selalu merupakan elemen idempoten karena $(0_A)^2 = 0_A \cdot_A 0_A = 0_A$ dan $(1_A)^2 = 1_A \cdot_A 1_A = 1_A$. Atas dasar tersebut, 0_A dan 1_A disebut elemen idempoten trivial. Pada gelanggang $\mathbb{Z}_{12}$, 4 merupakan elemen idempoten (yang non-trivial) karena $4^2 = 4 \cdot_{12} 4 = (4 \cdot 4)(\mathrm{mod}\,12) = 16(\mathrm{mod}\,12) = 4$. □

Berdasarkan Definisi 2.2.1 dapat diturunkan beberapa sifat sederhana yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2.2.3. *Diberikan $(A, +_A, \cdot_A)$ suatu gelanggang dengan elemen satuan 1_A dan $x \in A$.*

a) *Jika x merupakan elemen idempoten di A, maka $1_A - x$ juga merupakan elemen idempoten di A.*
b) *Jika x merupakan elemen idempoten yang memiliki invers terhadap operasi perkalian di A, maka $x = 1_A$.*

Bukti:

a) Jika x merupakan elemen idempoten di A, maka $x^2 = x$. Akibatnya:

$$(1_A - x)^2 = (1_A - x) \cdot_A (1_A - x) = 1_A \cdot_A 1_A - 1_A \cdot_A x - x \cdot_A 1_A + x \cdot_A x$$
$$= 1_A - x - x + x^2 = 1_A - x - x + x = 1_A - x$$

Artinya $1_A - x$ memenuhi definisi elemen idempoten di A.

b) Jika x merupakan elemen idempoten di A, maka $x^2 = x$. Jika x memiliki invers terhadap operasi perkalian di A, maka terdapat $x^{-1} \in A$ sehingga $x \cdot_A x^{-1} = x^{-1} \cdot_A x = 1_A$. Akibatnya:

$$x = x \cdot_A 1_A = x \cdot_A (x \cdot_A x^{-1}) = (x_A \cdot_A x) \cdot_A x^{-1} = x^2 \cdot_A x^{-1} = x \cdot_A x^{-1} = 1_A.$$

□

Teorema 2.2.3 akan cukup membantu untuk mencari elemen-elemen idempoten dari suatu gelanggang. Berdasarkan bagian a), dari suatu elemen idempoten yang telah diketahui, dapat ditentukan sebuah elemen idempoten yang lain. Berdasarkan bagian b), tidak ada elemen idempoten non-trivial yang memiliki invers terhadap perkalian, sehingga pencarian elemen

idempoten dapat dipersempit ke elemen-elemen gelanggang yang tidak memiliki invers terhadap perkalian.
Secara umum, elemen idempoten sendiri merupakan topik yang banyak dikaji lebih dalam di penelitian aljabar abstrak, tidak hanya untuk gelanggang $\mathbb{Z}_n$, tetapi juga untuk berbagai macam gelanggang khusus [5], [6], [7], [8]. Selain elemen idempoten, elemen khusus pada gelanggang yang banyak dikaji adalah elemen nilpoten [9], [10] dan elemen bersih [11], [12].

3. Hasil dan Pembahasan

Ada beberapa kajian tingkat lanjut mengenai elemen idempoten dari suatu gelanggang [13], [14], [15], tetapi pada makalah ini yang akan dikaji adalah kaitan antara elemen idempoten dengan homomorfisma gelanggang, secara khusus untuk homomorfisma gelanggang dari ke $\mathbb{Z}_n$, dengan m dan n dua bilangan asli yang boleh berbeda.

Seperti yang telah dipaparkan sebelumnya, untuk setiap bilangan asli n, $\mathbb{Z}_n$ merupakan gelanggang komutatif dengan elemen satuan (identitas perkalian), yaitu 1. Akan tetapi 1 di $\mathbb{Z}_n$ tidak sama dengan 1 di $\mathbb{Z}_m$ jika $m \neq n$, sehingga digunakan notasi 1_m dan 1_n berturut-turut untuk menyatakan elemen satuan dari $\mathbb{Z}_m$ dan $\mathbb{Z}_n$.

Teorema 3.1. *Diberikan bilangan-bilangan asli m dan n beserta pemetaan-pemetaan $f: \mathbb{Z}_m \to \mathbb{Z}_n$ dan $g: \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$.*

a) *Jika f merupakan homomorfisma gelanggang, maka $f(x) = ax(\bmod n)$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_m$, dengan a suatu elemen idempoten di $\mathbb{Z}_n$ yang memenuhi $am(\bmod n) = 0$.*
b) *Jika g merupakan homomorfisma gelanggang, maka $g(x) = ax(\bmod n)$, untuk setiap $x \in \mathbb{Z}_n$, dengan a suatu elemen idempoten di $\mathbb{Z}_n$.*
c) *Jika n merupakan bilangan prima, n habis membagi m dan f merupakan homomorfisma gelanggang, maka f adalah pemetaan nol atau pemetaan identitas.*
d) *Jika n merupakan bilangan prima, n tidak habis membagi m dan f merupakan homomorfisma gelanggang, maka f adalah pemetaan nol.*
e) *Jika n merupakan bilangan prima dan g merupakan homomorfisma gelanggang, maka g adalah pemetaan nol atau pemetaan identitas.*

Bukti:

a) Ambil sebarang $x \in \mathbb{Z}_m$, maka $x = \underbrace{1_m + 1_m + \ldots + 1_m}_{x \text{ kali}}$. Karena f homomorfisma gelanggang, maka menurut Teorema 2.1.3 bagian b) diperoleh:

$$f(x) = \underbrace{f(1_m) + f(1_m) + \ldots + f(1_m)}_{x \text{ kali}} = \left(f(1_m) \cdot x\right)(\bmod n).$$

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa pemetaan f berbentuk $f(x) = ax(\bmod n)$ dengan $a = f(1_m)$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $am(\bmod n) = 0$ dan a merupakan elemen idempoten di $\mathbb{Z}_n$. Menurut Teorema 2.1.3 bagian a), haruslah $f(0_m) = 0_n$. Pada $\mathbb{Z}_m$ berlaku $\underbrace{1_m + 1_m + \ldots + 1_m}_{m \text{ kali}} = 0_m$, sehingga diperoleh:

$$f(0_m) = 0_n \quad \Leftrightarrow f\left(\underbrace{1_m + 1_m + \ldots + 1_m}_{m \text{ kali}}\right) = 0_n$$
$$\Leftrightarrow f(1_m) \cdot m = 0_n \quad \Leftrightarrow am(\bmod n) = 0$$

Di lain pihak, berdasarkan sifat kedua dari homomorfisma gelanggang diperoleh:

$$a = f(1_m) = f(1_m \cdot_m 1_m) = f(1_m) \cdot_n f(1_m) = \left[f(1_m)\right]^2 = a^2,$$

yang berarti a merupakan elemen idempoten di $\mathbb{Z}_n$.

b) Bagian ini merupakan kejadian khusus dari bagian a), dengan $m=n$. Jika $m=n$, maka $am(\bmod n)=an(\bmod n)=0$, sehingga syarat tersebut pasti terpenuhi dan tidak perlu ditulis lagi.

c) Jika n merupakan bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_n$ suatu lapangan, sehingga setiap elemen tak nol di $\mathbb{Z}_n$ memiliki invers terhadap perkalian. Akibatnya elemen-elemen idempoten di $\mathbb{Z}_n$ hanyalah 0_n dan 1_n. Jika n habis membagi m, maka $m(\bmod n)=0$, sehingga dua elemen idempoten trivial tersebut sama-sama memenuhi syarat pada bagian a). Jadi kemungkinan bagi f adalah $f(x)=(0\cdot x)(\bmod n)=0$ (pemetaan nol) atau $f(x)=(1\cdot x)(\bmod n)=x(\bmod n)$ (pemetaan identitas).

d) Bukti sejalan dengan bagian c), tetapi karena n tidak habis membagi m, maka $m(\bmod n)\neq 0$. Dengan demikian 1_n tidak memenuhi syarat pada bagian a), sehingga dalam kasus ini pemetaan identitas bukan merupakan homomorfisma gelanggang. Jadi kemungkinan bagi f hanyalah pemetaan nol.

e) Bagian ini merupakan kejadian khusus dari bagian c), dengan $m=n$. Jika $m=n$, maka n habis membagi m, sehingga kemungkinannya akan sama dengan bagian c). $\square$

Implementasi dari Teorema 3.1 dapat dilihat dalam contoh-contoh berikut.
Contoh 3.2.

a) Akan ditentukan semua homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_9$ ke $\mathbb{Z}_{12}$. Homomorfisma gelanggang tersebut berbentuk $f(x)=ax(\bmod 12)$, untuk setiap $x\in\mathbb{Z}_9$, dengan a suatu elemen idempoten di $\mathbb{Z}_{12}$ dan $9a(\bmod 12)=0$. Elemen-elemen idempoten di $\mathbb{Z}_{12}$ adalah 0, 1, 4 dan 9. Dari keempat elemen tersebut yang memenuhi persamaan $9a(\bmod 12)=0$ adalah $a=0$ dan $a=4$. Jadi ada dua kemungkinan homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_9$ ke $\mathbb{Z}_{12}$, yaitu $f(x)=0_{12}$ (pemetaan nol) dan $f(x)=4x(\bmod 12)$.

b) Elemen-elemen idempoten dari $\mathbb{Z}_{24}$ adalah 0, 1, 9 dan 16. Dengan demikian, homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_{24}$ ke dirinya sendiri adalah pemetaan nol, pemetaan identitas, pemetaan $g(x)=9x(\bmod 24)$ dan pemetaan $g(x)=16x(\bmod 24)$, untuk setiap $x\in\mathbb{Z}_{24}$.

c) Akan ditentukan semua homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_{48}$ ke $\mathbb{Z}_{60}$. Homomorfisma gelanggang tersebut berbentuk $f(x)=ax(\bmod 60)$, untuk setiap $x\in\mathbb{Z}_{48}$, dengan a suatu elemen idempoten di $\mathbb{Z}_{60}$ dan $48a(\bmod 60)=0$. Ada delapan elemen idempoten di $\mathbb{Z}_{60}$, yaitu 0, 1, 16, 21, 25, 36, 40 dan 45. Dari kedelapan elemen tersebut yang memenuhi persamaan $48a(\bmod 60)=0$ adalah $a=0$, $a=25$, $a=40$ dan $a=45$. Jadi ada empat kemungkinan homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_{48}$ ke $\mathbb{Z}_{60}$, yaitu pemetaan nol, $f(x)=25x(\bmod 60)$, $f(x)=40x(\bmod 60)$ dan $f(x)=45x(\bmod 60)$. $\square$

Berdasarkan penjelasan pada Contoh 3.2, terlihat bahwa homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_m$ ke $\mathbb{Z}_n$ dapat ditentukan dengan terlebih dahulu mencari semua elemen idempoten dari $\mathbb{Z}_n$. Banyaknya kemungkinan homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_m$ ke $\mathbb{Z}_n$ bergantung pada banyaknya elemen idempoten di $\mathbb{Z}_n$ yang jika dikalikan dengan m, hasilnya habis dibagi n. Dengan demikian, jika nilai m atau n lebih besar, belum tentu kemungkinan homomorfismanya akan lebih banyak.

4. Kesimpulan

Berdasarkan pembahasan pada bagian-bagian sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa homomorfisma gelanggang berkaitan erat dengan elemen idempoten, khususnya untuk homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_m$ ke $\mathbb{Z}_n$. Supaya sifat mengawetkan operasi perkalian berlaku, peta dari elemen satuan di domain haruslah merupakan elemen idempoten di kodomain. Untuk menentukan elemen-elemen idempoten di gelanggang $\mathbb{Z}_n$, metode-metode dalam teori bilangan dapat digunakan.

Selain itu, supaya berlaku salah satu sifat homomorfisma, yaitu peta dari elemen nol di domain sama dengan elemen nol di kodomain, haruslah elemen idempoten tersebut jika dikalikan dengan m, hasilnya habis dibagi n. Untuk beberapa nilai m dan n tertentu, ada kemungkinan bahwa tidak ada elemen idempoten non-trivial yang memenuhi syarat tersebut. Dalam beberapa kasus akan dijumpai bahwa homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_m$ ke $\mathbb{Z}_n$ hanyalah pemetaan nol (homomorfisma trivial) saja.

Karakterisasi homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_m$ ke $\mathbb{Z}_n$ yang dipaparkan dalam makalah ini dapat cukup membantu dalam memberikan contoh homomorfisma gelanggang. Untuk nilai-nilai m dan n yang cukup besar, variasi dari contoh-contoh tersebut juga dapat membantu untuk mengilustrasikan Teorema Fundamental Homomorfisma Gelanggang. Secara umum karakterisasi-karakterisasi tersebut juga berkaitan dengan beberapa sifat atau teorema mengenai teori bilangan.

Hasil penelitian yang dipaparkan dalam makalah ini masih terbatas pada gelanggang $\mathbb{Z}_n$ saja. Penelitian lanjutan masih dapat dilakukan untuk berbagai macam gelanggang yang lain, misalnya untuk gelanggang suku banyak (sebagai contoh gelanggang yang banyak anggotanya tak hingga) atau untuk gelanggang matriks (sebagai contoh untuk kasus gelanggang yang tidak komutatif). Kasus campuran seperti homomorfisma gelanggang dari $\mathbb{Z}_n$ ke gelanggang matriks atau sebaliknya juga dapat dikaji lebih lanjut.

Referensi

[1] Miller CC. Essentials of Modern Algebra, 2nd Edition. Herndon, VA: Mercury Learning & Information. 2019.

[2] Stein W. Elementary Number Theory: Primes, Congruences and Secrets, A Computational Approach. Berlin: Springer-Verlag, 2008.

[3] Wahyuni S, Wijayanti IE, Yuwaningsih DA, Hartanto AD. Teori Ring dan Modul. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press. 2016.

[4] Wisbauer R. Foundation of Module and Ring Theory. Philadelphia: Gordon and Breach. 1991.

[5] Azami J. 2019. A Short Note on Idempotent Rings. *Italian Journal of Pure and Applied Mathematics*. 41: 65-69.

[6] de Melo Hernandez FD, Hernandez Melo CA, Tapia-Recillas H. 2020. On Idempotents of A Class of Commutative Rings. *Communications in Algebra*. 48(9): 4013-4026.

[7] Kose H, Ungor B, Harmanci A. 2019. Semicommutativity of Rings by the Way of Idempotents. *Filomat*. 33(11): 3497-3508.

[8] Porubsky S. 2018. Idempotents, Group Membership and Their Applications. *Mathematica Slovaca*. 68(6): 1231-1312.

[9] Chen FY, Hagan H, Wang A. 2019. On Skew Polynomial Rings over Locally Nilpotent Rings. *Communications in Algebra*. 47(3): 1102-1104.

[10] De Filippis V, Shujat F, Khan S. 2019. Generalized Derivations with Nilpotent, Power-central, and Invertible Values in Prime and Semiprime Rings. *Communications in Algebra*. 47(8): 3025-3039.

[11] Hashemi E, Hamidizadeh M, Alhevaz A. 2019. On Clean and Regular Elements of Noncommutative Ring Extensions. *Communications in Algebra*. 47(4): 1650-1661.

[12] Hashemi E, Yazdanfar M. 2019. On Clean and Nil Clean Elements in Skew T.U.P. Monoid Rings. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*. 56(1): 57-71.

[13] Ferreira BLM, Ferreira RN, Guzzo H. 2020. Generalized Jordan Derivations on Semiprime Rings. *Journal of the Australian Mathematical Society*. 109(1): 36-43.

[14] Hryniewicka ME, Jastrzebska M. 2019. On Some Generalizations of the Reversibility in Nonunital Rings. *Journal of the Korean Mathematical Society*. 56(2): 289-309.

[15] Kimball CF, LaGrange JD. 2018. The Idempotent-divisor Graphs of A Commutative Ring. *Communications in Algebra*. 46(9): 3899-3912.