

PENYELESAIAN MODEL EPIDEMI SIR MENGGUNAKAN METODE RUNGE-KUTTA ORDE EMPAT DAN METODE ADAMS-BASHFORTH-MOULTON

Laurensius Ian Setiawan^{1)*}, Sudi Mungkasi²⁾

¹⁾Jurusan Pendidikan Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia

²⁾Jurusan Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta, Indonesia

*Corresponding Author: setiawan.ian@gmail.com

Abstrak

Model epidemi SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*) telah diterapkan secara luas untuk simulasi penyebaran penyakit menular. Makalah ini menyajikan skema numeris metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adams-Bashforth-Moulton untuk menyelesaikan model SIR. Lebih lanjut, makalah ini menyajikan penyelesaian model SIR yang dihasilkan dengan simulasi komputer. Hasil simulasi atas kedua metode tersebut memberikan rata-rata nilai mutlak selisih yang sangat kecil. Dengan demikian, skema numeris dan hasil simulasi dalam makalah ini dapat dipercaya kebenarannya. Dalam melakukan simulasi penyebaran penyakit menular, penggunaan dua metode yang berbeda disarankan agar hasil simulasi diyakini benar.

Kata kunci: model epidemi SIR; metode Runge-Kutta orde empat; metode Adams-Bashforth-Moulton; simulasi numeris; penyebaran penyakit

Abstract

SIR epidemic model has been used extensively to simulate the spread of contagious disease. This paper provides the numerical scheme of the fourth order Runge-Kutta method and that of Adams-Bashforth-Moulton method for solving the SIR model. Furthermore, this paper provides solutions to the SIR model produced from computer simulations. Simulation results gives very small average numbers of the averages of absolute values of differences between the two solutions of the two methods. Therefore, the numerical schemes and simulation results in this paper can be trusted true. In doing simulations of the spread of contagious disease, the use of two different methods is suggested, so that simulation results are trusted to be true.

Keywords: SIR epidemic model; fourth order Runge-Kutta method; Adams-Bashforth-Moulton method; numerical simulation; disease spread

1. Pendahuluan

Pemodelan matematika telah berperan penting dalam kehidupan manusia [1]. Banyak masalah terkait bidang ilmu lain yang dapat diselesaikan menggunakan model matematika, misalnya masalah terkait fisika [2,3], biologi [4,5], dan komputasi [6-9]. Ketika masalah nyata dinyatakan ke dalam model matematika, model tersebut perlu diselesaikan sehingga penyelesaian model matematika menjadi pendekatan atas penyelesaian masalah nyata. Di tahun 2020-2021, salah satu masalah nyata yang menjadi perhatian masyarakat dunia adalah penyebaran penyakit COVID-19 [4].

Salah satu contoh model matematika yang dapat diterapkan dalam simulasi penyebaran COVID-19 adalah model epidemi SIR (*Susceptible-Infected-Recovered*). Model epidemi SIR telah banyak diterapkan untuk memprediksi pola perilaku penyakit menyebar pada manusia terhadap waktu dalam suatu daerah [10,11]. Model SIR juga tersedia dalam bentuk modifikasi yang disesuaikan dengan keadaan yang akan disimulasikan [12]. Model SIR secara umum belum

mempunyai penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi eksplisit terhadap waktu. Oleh sebab itu, model SIR biasa diselesaikan secara numeris.

Dua metode yang akurat yang bisa digunakan untuk menyelesaikan model SIR adalah metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adams-Bashforth-Moulton. Metode Runge-Kutta dan variasinya telah berhasil diterapkan dalam berbagai literatur [13-16]. Lebih lanjut, metode Adams-Bashforth-Moulton juga populer dalam berbagai masalah lain [17-21]. Karena banyaknya ketertarikan sejumlah peneliti pada kedua metode tersebut, makalah ini menggunakan metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adams-Bashforth-Moulton untuk menyelesaikan model epidemi SIR.

Model epidemi SIR yang dibahas dalam makalah ini adalah sistem persamaan diferensial biasa orde satu nonlinear berikut ini:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta SI, \tag{1}$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \alpha I, \tag{2}$$

$$\frac{dR}{dt} = \alpha I. \tag{3}$$

Dalam model ini, α adalah notasi nilai laju penyembuhan, β mewakili nilai laju penyebaran penyakit, S melambangkan populasi rentan terhadap penyakit, I mewakili populasi terinfeksi COVID-19, dan R adalah notasi populasi yang sembuh.

Makalah ini menawarkan dua kontribusi. Kontribusi pertama adalah sajian skema numeris Runge-Kutta orde empat dan skema numeris Adams-Bashforth-Moulton untuk menyelesaikan model epidemi SIR (1)-(3). Kontribusi kedua adalah hasil simulasi dan diskusinya.

2. Metode Penelitian

Dalam bagian ini disajikan dua metode penelitian yang diterapkan. Perlu diperhatikan bahwa penelitian ini bersifat studi numeris dan simulatif. Metode penelitiannya berupa metode numeris untuk simulasi. Metode yang pertama adalah metode Runge-Kutta orde empat. Metode yang kedua adalah metode Adams-Bashforth-Moulton.

Dengan memperhatikan nilai awalan masing-masing populasi S_0 , I_0 , dan R_0 , metode Runge-Kutta orde empat untuk menyelesaikan model SIR (1)-(3) adalah:

$$S_{i+1} = S_i + \frac{1}{6}(k_{1S} + 2k_{2S} + 2k_{3S} + k_{4S}), \tag{4}$$

$$I_{i+1} = I_i + \frac{1}{6}(k_{1I} + 2k_{2I} + 2k_{3I} + k_{4I}), \tag{5}$$

$$R_{i+1} = R_i + \frac{1}{6}(k_{1R} + 2k_{2R} + 2k_{3R} + k_{4R}), \tag{6}$$

dengan h adalah langkah waktu, dan i adalah indeks iterasi, serta:

$$k_{1S} = h(-\beta S_i I_i), \tag{7}$$

$$k_{1I} = h(\beta S_i I_i - \alpha I_i), \tag{8}$$

$$k_{1R} = h(\alpha I_i), \tag{9}$$

$$k_{2S} = h\left(-\beta\left(S_i + \frac{1}{2}k_{1S}\right)\left(I_i + \frac{1}{2}k_{1I}\right)\right), \tag{10}$$

$$k_{2I} = h\left(\beta\left(S_i + \frac{1}{2}k_{1S}\right)\left(I_i + \frac{1}{2}k_{1I}\right) - \alpha\left(I_i + \frac{1}{2}k_{1I}\right)\right), \tag{11}$$

$$k_{2R} = h\left(\alpha\left(I_i + \frac{1}{2}k_{1I}\right)\right), \tag{12}$$

$$k_{3S} = h\left(-\beta\left(S_i + \frac{1}{2}k_{2S}\right)\left(I_i + \frac{1}{2}k_{2I}\right)\right), \tag{13}$$

$$k_{3I} = h\left(\beta\left(S_i + \frac{1}{2}k_{2S}\right)\left(I_i + \frac{1}{2}k_{2I}\right) - \alpha\left(I_i + \frac{1}{2}k_{2I}\right)\right), \tag{14}$$

$$k_{3R} = h \left(\alpha \left(I_i + \frac{1}{2} k_{2I} \right) \right), \tag{15}$$

$$k_{4S} = h(-\beta(S_i + k_{3S})(I_i + k_{3I})), \tag{16}$$

$$k_{4I} = h(\beta(S_i + k_{3S})(I_i + k_{3I}) - \alpha(I_i + k_{3I})), \tag{17}$$

$$k_{4R} = h(\alpha(I_i + k_{3I})). \tag{18}$$

Metode Adams-Bashforth-Moultons adalah metode banyak langkah, yang terdiri atas predictor dan corrector. Diperhatikan bahwa h adalah langkah waktu, berikut ini adalah predictor dan corrector tersebut.

Predictor

$$S_{i+1}^{(0)} = S_i + \frac{h}{24} (55(-\beta S_i I_i) - 59(-\beta S_{i-1} I_{i-1}) + 37(-\beta S_{i-2} I_{i-2}) - 9(-\beta S_{i-3} I_{i-3})), \tag{19}$$

$$I_{i+1}^{(0)} = I_i + \frac{h}{24} (55(\beta S_i I_i - \alpha I_i) - 59(\beta S_{i-1} I_{i-1} - \alpha I_{i-1}) + 37(\beta S_{i-2} I_{i-2} - \alpha I_{i-2}) - 9(\beta S_{i-3} I_{i-3} - \alpha I_{i-3})), \tag{20}$$

$$R_{i+1}^{(0)} = R_i + \frac{h}{24} (55(\alpha I_i) - 59(\alpha I_{i-1}) + 37(\alpha I_{i-2}) - 9(\alpha I_{i-3})), \tag{21}$$

Corrector

$$S_{i+1}^{(1)} = S_i + \frac{h}{24} (9(-r S_{i+1}^{(0)} I_{i+1}^{(0)}) + 19(-r S_i I_i) - 5(-r S_{i-1} I_{i-1}) + (-r S_{i-2} I_{i-2})), \tag{22}$$

$$I_{i+1}^{(1)} = I_i + \frac{h}{24} (9(r S_{i+1}^{(0)} I_{i+1}^{(0)} - \alpha I_{i+1}^{(0)}) + 19(r S_i I_i - \alpha I_i) - 5(r S_{i-1} I_{i-1} - \alpha I_{i-1}) + (r S_{i-2} I_{i-2} - \alpha I_{i-2})), \tag{23}$$

$$R_{i+1}^{(1)} = R_i + \frac{h}{24} (9(\alpha I_{i+1}^{(0)}) + 19(\alpha I_i) - 5(\alpha I_{i-1}) + (\alpha I_{i-2})). \tag{24}$$

3. Hasil dan Pembahasan

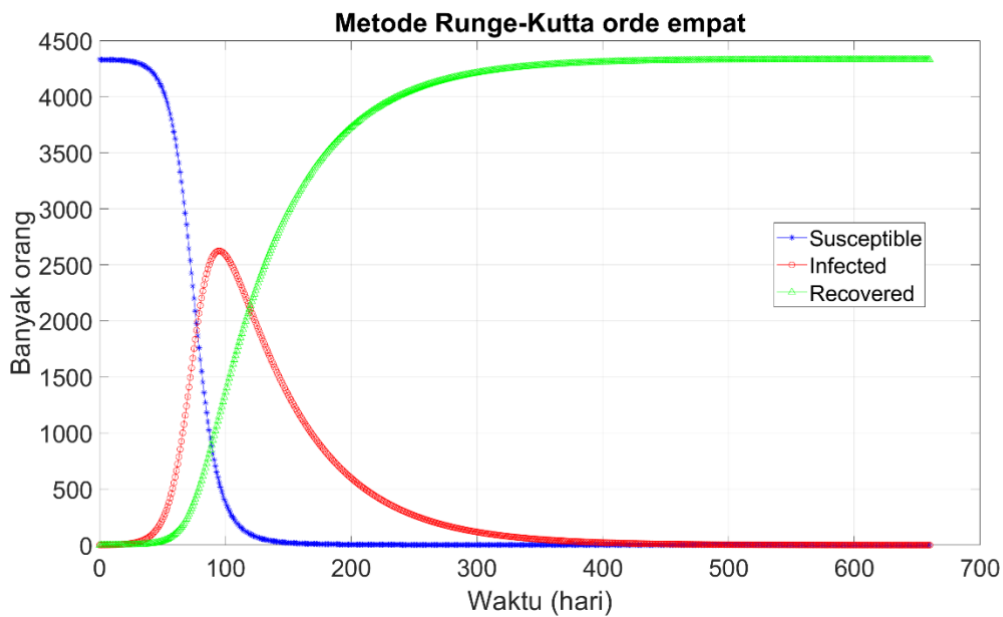
Bagian ini berisi hasil simulasi berdasarkan skema numeris metode Runge-Kutta orde empat dan skema numeris metode Adams-Bashforth-Moulton. Diskusi perbedaan hasil penyelesaian juga disajikan. Simulasi numeris dikerjakan menggunakan *Personal Computer* (laptop) dengan perangkat lunak MATLAB.

3.1. Hasil Simulasi Metode Runge-Kutta Orde Empat

Untuk simulasi numeris, diperlukan nilai awal dan nilai parameter. Tabel 1 memberikan nilai-nilai tersebut guna simulasi dengan metode Runge-Kutta orde empat. Satuan waktu yang digunakan adalah hari.

Tabel 1. Parameter dan nilai awal untuk metode Runge-Kutta orde empat

Parameter	Nilai kondisi awal
β	$2,9236 \times 10^5$
α	0,0164
h	1
S_0	4331
I_0	1
R_0	0



Gambar 1. Grafik perilaku penyebaran penyakit dengan metode Runge-Kutta orde empat

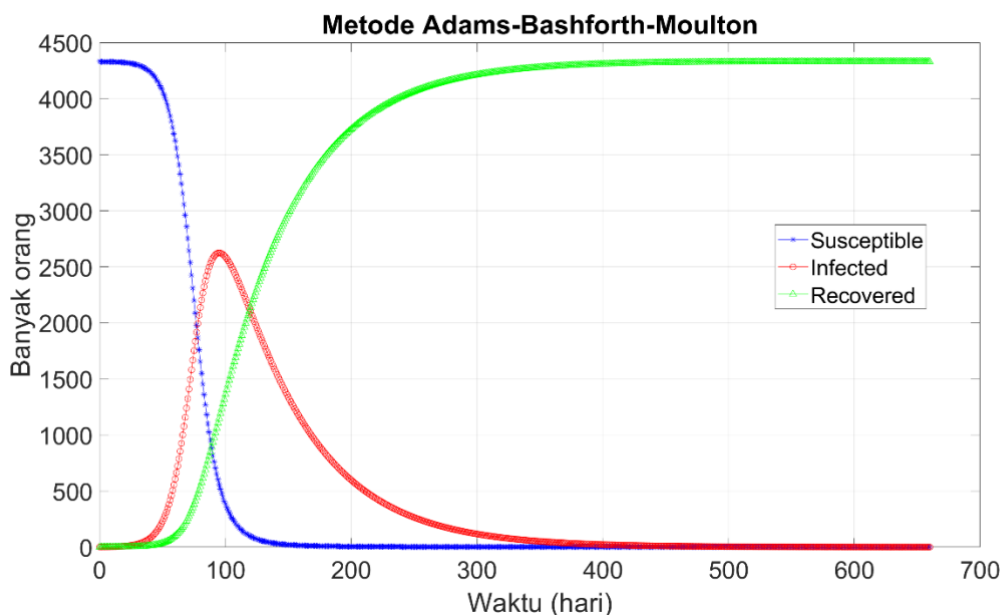
Gambar 1 memberikan perilaku penyebaran penyakit dengan model SIR menggunakan metode Runge-Kutta orde empat. Dari hasil ini besarnya S , yaitu populasi yang rentan terhadap penyakit, menurun seiring dengan waktu. Populasi I , yaitu populasi yang terinfeksi penyakit, mengalami kenaikan hingga suatu waktu tertentu dan selanjutnya turun seiring dengan waktu. Yang terakhir adalah populasi R , yaitu populasi yang sembuh dari sakit; populasi ini mengalami kenaikan secara perlahan di awal waktu, selanjutnya naik secara drastis, dan menjelang akhir periode, populasi ini naik secara perlahan yang bersesuaian dengan populasi S dan I yang turun secara asimtotis menuju nol.

3.2. Hasil Simulasi Metode Adams-Bashforth-Moultons

Seperti halnya simulasi pada metode Runge-Kutta orde empat, simulasi pada metode Adams-Bashforth-Moulton juga memerlukan nilai awal dan nilai parameter. Dalam metode Adams-Bashforth-Moulton ini diperlukan lebih banyak nilai awal karena sifatnya yang merupakan metode banyak langkah. Nilai-nilai awal dan parameter untuk metode Adams-Bashforth-Moulton didaftar dalam Tabel 2. Nilai-nilai S_1 hingga R_3 dalam Tabel 2 diperoleh menggunakan metode Runge-Kutta orde empat; iterasi selanjutnya baru digunakan metode Adams-Bashforth-Moulton.

Tabel 2. Parameter dan nilai awal untuk metode Adams-Bashforth-Moulton

Parameter	Nilai
β	$2,9236 \times 10^5$
α	0,0164
h	1
S_0	4331
I_0	1
R_0	0
S_1	4330,8661
I_1	1,11652
R_1	0,01734
S_2	4330,7167
I_2	1,24662
R_2	0,0367
S_3	4330,5498
I_3	1,39186
R_3	0,05831



Gambar 2. Grafik perilaku penyebaran penyakit dengan metode Adams-Bashforth-Moulton

Hasil simulasi penyebaran penyakit dengan model SIR menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton ditunjukkan dalam Gambar 2. Hasil ini mirip dengan pola penyebaran hasil dari metode Runge-Kutta orde empat. Perilakunya pun juga sama.

3.3. Selisih antara Nilai Penyelesaian Kedua Metode

Dari Gambar 1 dan Gambar 2, tampak bahwa pola penyelesaian metode Runge-Kutta orde empat dan metode Adams-Bashforth-Moulton adalah sama. Untuk memastikan bahwa kedua metode benar-benar mempunyai perilaku yang sama, perlu dihitung secara kuantitatif rata-rata selisih nilai mutlak antara kedua penyelesaian. Hasil perhitungan menunjukkan bahwa rata-rata selisih nilai mutlak kedua penyelesaian adalah 0,00615 untuk variabel *S*; 0,00628 untuk variabel *I*; dan 0,1769 untuk variabel *R*. Ketiga nilai ini cukup kecil dibandingkan total populasi yang sebesar 4.332 individu. Dengan demikian, kedua penyelesaian yang dihasilkan oleh kedua metode tersebut disebut konsisten perilakunya satu sama lain.

4. Kesimpulan

Dua kontribusi telah disajikan dalam makalah ini. Kontribusi pertama adalah penyajian skema numeris metode Runge-Kutta orde empat dan skema numeris Adams-Bashforth-Moulton untuk menyelesaikan model epidemi SIR. Kontribusi kedua adalah hasil simulasi dan diskusinya atas kedua metode tersebut untuk penyebaran penyakit dengan bantuan komputer. Hasil penelitian dalam makalah ini menunjukkan bahwa selisih antara penyelesaian metode Runge-Kutta orde empat dan penyelesaian metode Adams-Bashforth-Moulton sangatlah kecil. Dalam simulasi penyebaran penyakit, sangat disarankan agar digunakan beberapa metode yang berbeda (setidaknya dua metode berbeda) sehingga hasil simulasi diyakini benar.

Pernyataan

Isi makalah ini adalah hasil pengembangan dari tesis yang disusun oleh penulis pertama (Laurensius Ian Setiawan) atas bimbingan penulis kedua (Sudi Mungkasi) di Universitas Sanata Dharma, Yogyakarta [1]. Hasil-hasil dalam tesis tersebut belum pernah diterbitkan sebelumnya. Model matematika, skema numeris, dan nilai parameter dalam makalah ini diambil dari tesis tersebut. Bagian-bagian lainnya merupakan pengembangan yang dikerjakan oleh kedua penulis. Kedua penulis berterima kasih kepada Universitas Sanata Dharma atas dukungan yang diberikan dalam penerbitan makalah ini.

Referensi

- [1] Setiawan, L.I. 2021. *Kajian numeris dan aspek pendidikan dari penyelesaian model Susceptible-Infected-Recovered penyebaran penyakit virus Corona 2019 (COVID-19)*. Tesis Magister Pendidikan Matematika. Yogyakarta: Universitas Sanata Dharma.
- [2] Yang, M., Fang, H., Wang, F., Jia, H., Lei, J., Zhang, D. 2019. The three dimension first-order symplectic partitioned Runge-Kutta scheme simulation for GPR wave propagation in pavement structure. *IEEE Access*. 7: 151705-151712.
- [3] Aksim, D., Pavlov, D. 2020. On the extension of Adams–Bashforth–Moulton methods for numerical integration of delay differential equations and application to the moon's orbit. *Mathematics in Computer Science*. 14: 103-109.
- [4] Pratiwi, C.D., Mungkasi, S. 2021. Euler's and Heun's numerical solutions to a mathematical model of the spread of COVID-19. *AIP Conference Proceedings*. 2353(1): 030110.
- [5] Simangunsong, L., Mungkasi, S. 2021. Fourth order Runge-Kutta method for solving a mathematical model of the spread of HIV-AIDS. *AIP Conference Proceedings*. 2353(1): 030092.
- [6] Nugroho, B., Denih, A. 2020. Perbandingan kinerja metode pra-pemrosesan dalam pengklasifikasian otomatis dokumen paten. *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer dan Matematika*. 17(2): 381-387.
- [7] Ulfha, N.F., Amin, R. 2020. Implementasi data mining untuk mengetahui pola pembelian obat menggunakan algoritma apriori. *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer dan Matematika*. 17(2): 396-402.
- [8] Dewi, N.P.N.P., Nugroho, R.A. 2021. Optimasi general regression neural network dengan fruit fly optimization algorithm untuk prediksi pemakaian arus listrik pada penyulang. *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer dan Matematika*. 18(1): 1-12.
- [9] Saepulrohman, A., Negara, T.P. 2021. Implementasi algoritma tanda tangan digital berbasis kriptografi kurva eliptik Diffie-Hellman. *Komputasi: Jurnal Ilmiah Ilmu Komputer dan Matematika*. 18(1): 22-28.
- [10] Mungkasi, S. 2021. Variational iteration and successive approximation methods for a SIR epidemic model with constant vaccination strategy. *Applied Mathematical Modelling*. 90: 1-10.
- [11] Mungkasi, S. 2020. Improved variational iteration solutions to the SIR model of dengue fever disease for the case of South Sulawesi. *Journal of Mathematical and Fundamental Sciences*. 52(3): 297-311.
- [12] Mungkasi, S. 2020. Successive approximation, variational iteration, and multistage-analytical methods for a SEIR model of infectious disease involving vaccination strategy. *Communication in Biomathematical Sciences*. 3(2): 114-126.
- [13] Karasözen, B. 1998. Runge-Kutta methods for hamiltonian systems in non-standard symplectic two-form. *International Journal of Computer Mathematics*. 66(1-2): 113-122.
- [14] Guan, L., Shen, J. 2018. Bifurcation analysis about a mathematical model of somitogenesis based on the Runge–Kutta method. *Wireless Personal Communications*. 103: 221-230.
- [15] Lede, Y.K., Mungkasi, S. 2019. Performance of the Runge-Kutta methods in solving a mathematical model for the spread of dengue fever disease. *AIP Conference Proceedings*. 2202(1): 020044.
- [16] Kovalnogov, V.N., Simos, T.E., Tsitouras, C. 2021. Runge–Kutta pairs suited for SIR-type epidemic models. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 44(6): 5210-5216.
- [17] Tutueva, A., Karimov, T., Butusov, D. 2020. Semi-implicit and semi-explicit Adams–Bashforth–Moulton methods. *Mathematics*. 8(5): 780.
- [18] Kumar, S., Kumar, R., Agarwal, R.P., Samet, B. 2020. A study of fractional Lotka–Volterra population model using Haar wavelet and Adams–Bashforth–Moulton methods. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*. 43(8): 5564-5578.
- [19] Wang, D., Dong, S., Ning, M., Incecik, A. 2021. Extended variable-time-step Adams–Bashforth–Moulton method for strongly coupled fluid–structure interaction simulation. *Ocean Engineering*. 219: 108335.

- [20] Khader, M.M. 2021. Using the generalized Adams-Bashforth-Moulton method for obtaining the numerical solution of some variable-order fractional dynamical models. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*. 22(1): 93-98.
- [21] Agarwal, P., Singh, R., ul Rehman, A. 2021. Numerical solution of hybrid mathematical model of dengue transmission with relapse and memory via Adam–Bashforth–Moulton predictor-corrector scheme. *Chaos, Solitons & Fractals*. 143: 110564.